wichtige Reihen: Potenzreihen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Bsp: geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

deren Teilsummen $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (Übung 9a)

so daß der $\lim_{n\to\infty}$ für $|x|<1$ ausführbar ist:

die Reihe konvergiert also, und

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x|<1$ ((und divergiert für $|x| \geq 1$))

Bsp: harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

(keine Potenzreihe..)

die Folge ihrer Teilsummen ist unbeschränkt,

denn $s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$

$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$

also divergiert die Reihe.

Um zu entscheiden, ob eine gegebene Reihe konvergiert, hilft oft das

Majorantenkriterium: wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so daß $\forall k \geq N$ $|a_k| \leq b_k$ gilt, und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(o.B., aber anschaulich klar)

Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$

Beweis: wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2|x|$.

für $k \geq N$ gilt dann:

$$\left|\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\frac{x^N}{N!}\right| \underbrace{\frac{|x|}{N+1} \cdots \frac{|x|}{k}}_{(k-N)\text{ Faktoren}} \leq \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-N} = \underbrace{\frac{|2x|^N}{N!}}_{\text{const.}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=:b_k}$$

und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert

↑ (= geometrische Reihe mit $x = \frac{1}{2}$)

↑ wird oft als "Majorante" gewählt

$e \approx 2{,}718\dots$

Bem: man nennt $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ die Exponential-Reihe

((und die Zahl e ist irrational ← Widerspruchsbeweis s. [Hefft 3.5]))

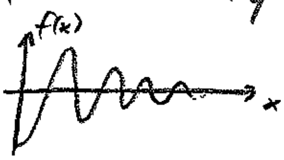
2. Funktionen

sind Abbildungen, z.B. $f: A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ mit Vorschrift $x \mapsto f(x)$

→ untersuche z.B. experimentell die Abhängigkeit zweier physikalischer Größen: notiere eine Messgröße $f(x)$ (z.B. Pendelausschlag) in Abhängigkeit der Variablen x (z.B. Zeit; schreibe dann meist $f(t)$).

Die Menge aller Punkte $(x, f(x))$ der x-y-Ebene heisst dann Graph von f.

→ z.B. für Pendel:



(s. Kap. 1.2)

Somit gilt alles (injektiv / surjektiv / bijektiv) wie bei Abbildungen

anschaulich: jede Parallele zur x-Achse schneidet Graph höchstens einmal

Von den Folgen (s. Kap. 1.4) übertragen wir Monotonie und Beschränktheit, z.B.

$y = f(x)$ monoton steigend in $[a,b] \Leftrightarrow \left(x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \right)$

monoton fallend $\geq$

Bsp $y(x) = ax + b$ ist für $a > 0$ monoton steigend

→ erstaunlicherweise kommt man in der Physik (≙ Natur ?!) mit sehr wenigen grundlegenden Funktionen aus. (Die wichtigsten wollen wir nun einführen)

Polynome: $P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$

↳ "Grad" des Polynoms

Konstanten: $m = 0$; Geraden: $m = 1$; Parabeln: $m = 2$; ...

Rationale Funktionen: $y(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ mit Polynomen $P_m(x)$, $Q_n(x)$

↳ Vorsicht: kann Null werden!
→ solche x aus Definitionsbereich ausschließen

Bsp: $y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

((Bem.: kann manchmal $\frac{P}{Q}$ durch Kürzen vereinfachen: Polynomdivision))

2.1 Exponentialfunktion (die wichtigste(?) Fkt der Physik)

definieren wir durch $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(dass die Reihe $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert, war in Kap. 1.4 gezeigt worden)

wichtigste Eigenschaften:

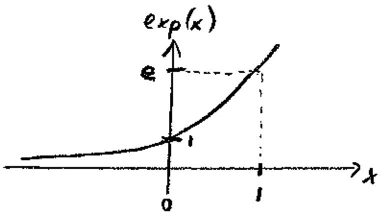
$\exp(0) = 1$ (klar aus Def.)

$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$ ($\leftarrow$ s. Übung 12)

$\Rightarrow \exp(x) > 0$

$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Funktionsgraph:



2.2 Stetigkeit

"die Natur macht keine Sprünge"

$\rightarrow$ der Graph einer "stetigen Funktion" macht keine Sprünge

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ stetig bei } x_0 \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \end{array}}$$

anschaulich: Punkte in der Nachbarschaft von x_0 werden auf Bildpunkte in der Nachbarschaft von $f(x_0)$ abgebildet.

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+$ (und auf $\mathbb{R}^-$)

zeige Stetigkeit an der Stelle $x_0 > 0$:

für $x \geq \frac{x_0}{2}$ gilt $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x\, x_0}\right| \leq \frac{2}{x_0^2}|x - x_0|$

so dass $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \frac{2}{x_0^2}\delta$

also ist mit $\delta_\varepsilon := \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right)$ die obige Stetigkeitsbedingung erfüllt.

Bem: • Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$, $\exp(x)$ ebenso.
(s. z.B. Übung 15 für Geraden)

• mit stetigen Funktionen kann man "rechnen":
Summe / Differenz / Produkt / Quotient stetiger Funktionen sind auch stetig

• insbesondere sind also rationale Funktionen auch stetig

Für stetige Funktionen gilt der

Zwischenwertsatz: (ohne Beweis; anschaulich klar)
Ist f stetig im Intervall I und sind $a, b \in I$, dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.
Gilt insbesondere $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so hat f zwischen a und b eine (oder 3, 5, ...) Nullstelle.

Bsp: hat die Gleichung $\exp(x) = x + 2$ eine Lösung $x_0 \in [0,2]$?
$\rightarrow$ Ja; für $f(x) := \exp(x) - x - 2$ gilt $f(0) = 1 - 0 - 2 = -1 < 0$
und $f(2) = \exp(2) - 4 > 0$ $\left(\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e \cdot e \approx (2.71)^2 \right)$
$\Rightarrow$ da exp und $x+2$ stetig, hat f zwischen 0 und 2 eine NS.

2.3 Symmetrien

wichtig in Naturwissenschaften: ein "symmetrisches" Problem hat meist eine symmetrische Lösung (z.B. Kristalle, ...)
Funktionen können auch Symmetrie-Eigenschaften haben, z.B.
Spiegelsymmetrie (an y-Achse):

$f(x)$ gerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$ Bsp: x^2; $|x|$

$f(x)$ ungerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$ Bsp: x^3; $\frac{1}{x}$

Jede Funktion kann als $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ geschrieben werden, wobei $f_{g/u}$ gerade/ungerade ist ($\leftarrow$ s. Übung 14b)