Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 01** 13.10.2010

[Besprechung 21.10 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 1: Videos

Stöbern Sie im Internet (z.B. `cern.ch`, `www.desy.de`, `www.fnal.gov` oder `www.youtube.com`), und suchen sie nach dem besten Video zum Thema Elementarteilchenphysik oder Standardmodell.

Aufgabe 2: Natürliche Einheiten

(a) Drücken Sie die Gravitationskonstante $G_N = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ in Einheiten von GeV aus. Wie groß ist die Planck–Masse $m_{\mathrm{Pl}} = G_N^{-1/2}$?
(b) Welcher Länge, Zeit, Energie und Masse (in SI–Einheiten) enspricht 1 GeV (in natürlichen Einheiten)?
(c) Wirkungsquerschnitte werden oft in Millibarn angegeben, wobei 1 mb $= 10^{-3}$ b $= 10^{-27}\mathrm{cm}^2$ sind. Wieviel Millibarn entsprechen einem Wirkungsquerschnitt von 1 GeV^{-2}?

Aufgabe 3: Energie, Masse, Impuls

(a) Wie schnell (in natürlichen Einheiten) ist ein Proton ($m \approx 1$ GeV), dessen im Labor gemessener Impuls $p = 0.1$ GeV ist? Und mit $p = 10$ GeV?
(b) Welchen Impuls hat ein Elektron ($m \approx 0.5$ MeV) der Energie 1 GeV?

Aufgabe 4: Strahlung aus der Atmosphäre

In etwa 8 km Höhe werden (durch kosmische Strahlen) in der Atmosphäre Pionen ($\pi^{\pm}$) erzeugt. Diese bewegen sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit (nehmen Sie $v = 0.998$ an) auf die Erde zu. Auf `pdg.lbl.gov` finden Sie heraus, dass Pionen nach 2.6×10^{-8} s (in ihrem Ruhesystem) in Myonen ($\mu^{\pm}$) (und was?) zerfallen. Über die Myonen finden Sie dort weiterhin heraus, dass diese nach 2.2×10^{-6} s in Elektronen (und was?) zerfallen.
(a) Auf welcher Höhe würden Sie einen Pion–Detektor aufstellen?
(b) Welche Teilchen lassen sich auf der Erdoberfläche nachweisen?

Aufgabe 5: Zerfall

Ein Teilchen der Masse M zerfalle in zwei andere Teilchen (mit Massen m_1, m_2 und Impulsen $\vec{p}_1, \vec{p}_2$). Geben Sie die Impulse der Zerfallsprodukte im Schwerpunktsystem an. Kann ein massives Teilchen ein Photon abstrahlen? Wie sieht es beim Zerfall von einem Teilchen in drei Teilchen aus?

- Bitte lösen Sie die angegebenen Aufgaben, so dass Sie diese in den Übungen erklären können
- Homepage der Vorlesung ist `http://www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/tp10`

Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 02** 20.10.2010

[Besprechung 28.10 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 6: Invarianz

Zeigen Sie, dass das 4-dimensionale Volumenelement $d^4x = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ Lorentzinvariant ist.

Aufgabe 7: $p + p \to p + p + p + \bar{p}$

(a) In einem "Fixed Target Experiment" ist eines der ursprünglichen Protonen p in Ruhe. Wieviel Energie muss das andere haben, damit der oben angegebene Prozess kinematisch erlaubt ist?
(b) Im "Large Hadron Collider" (LHC) stoßen die zwei Protonen mit gleicher Geschwindigkeit frontal zusammen. Was ist die Schwellenenergie in diesem Fall?

Aufgabe 8: Compton–Streuung

Ein Photon der Wellenlänge λ kollidiert mit einem geladenen Teilchen der Masse m. Bestimmen Sie die Wellenlänge λ' des Photons nach der Streuung um einen Winkel Θ.

Aufgabe 9: Wechselwirkungsbild

In der Vorlesung wurde der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_I(t, t_0)$ durch $i\partial_t \hat{U}_I(t, t_0) = g\hat{V}_I(t)\hat{U}_I(t, t_0)$ mit Anfangsbedingung $U_I(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ definiert.
(a) Zeigen Sie, dass $\hat{U}_I(t, t_0) = \mathbb{1} - ig \int_{t_0}^{t} dt' \hat{V}_I(t')\hat{U}_I(t', t_0)$ ist.
(b) Schreiben Sie die iterative Lösung dieser Gleichung zur Ordnung g^2 auf.
(c) Können Sie aus der sich ergebenden Struktur auf die exakte Lösung schliessen? [Hinweis: Exponentialfunktion]

Aufgabe 10: Dirac–Matrizen γ^μ

(a) Zeigen Sie, ausgehend von $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, dass $\mathrm{Sp}[\gamma^\mu] = 0$ ist.
(b) Zeigen Sie, ausgehend von der Standard–Darstellung der γ^μ, dass $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ gilt.
(c) Definieren wir nun $\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Zeigen Sie, dass
   (c1) $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$
   (c2) $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$
   (c3) $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$
   (c4) $\mathrm{Sp}[\gamma_5] = 0$

Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 03** 27.10.2010

[Besprechung 4.11 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 11: Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung angegebene Lösung $\hat{\phi}(x) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_\mathbf{p}}} \left(\hat{a}_\mathbf{p}\, e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\, e^{ipx}\right)$ die Vertauschungsrelation $\left[\hat{\phi}(t,\mathbf{x}), \partial_0\hat{\phi}^\dagger(t,\mathbf{y})\right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ erfüllt.

Aufgabe 12: Klein-Gordon-Gleichung $[\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2]\,\phi = 0$

Zeigen Sie dass $Q \equiv i\int d^3\mathbf{x}\,(\phi^*\,\partial_0\,\phi - \phi\,\partial_0\,\phi^*)$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 13: Dirac–Gleichung $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$

(a) Zeigen Sie: Der Dirac–adjungierte Spinor $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ erfüllt $\bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$.
(b) Ist die Ladung $Q \equiv \int d^3\mathbf{x}\,\bar{\psi}\gamma_0\psi$ eine Erhaltungsgröße?

Aufgabe 14: Normierung der Dirac–Lösung

Betrachten Sie die Spinoren

$$u(\mathbf{p},s) = c_1(\not{p}+m)\begin{pmatrix}\xi_s\\0\end{pmatrix}\,,\; v(\mathbf{p},s) = c_2(\not{p}-m)\begin{pmatrix}0\\\xi_{-s}\end{pmatrix} \quad \text{mit } \xi_+ \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,,\; \xi_- \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Normierungen $\bar{u}(\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s') = 2m\delta_{s,s'}$ sowie $\bar{v}(\mathbf{p},s)v(\mathbf{p},s') = -2m\delta_{s,s'}$ durch $c_1 = -c_2 = (E_\mathbf{p}+m)^{-1/2}$ erfüllt werden können.
Was folgt dann für $u^\dagger(\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s')$ und $v^\dagger(\mathbf{p},s)v(\mathbf{p},s')$?

Aufgabe 15: Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren

Betrachten wir den Helizitätsoperator $h(\mathbf{p}) = \mathbf{e_p}\cdot\vec{\Sigma}$ sowie den Chiralitätsoperator γ_5, wobei

$$\mathbf{e_p} \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad,\quad \vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix} \quad,\quad \vec{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \mathrm{Pauli-Matrizen}\,.$$

Zeigen Sie, dass

(a) $h^2(\mathbf{p}) = \mathbb{1}_{4\times4}$ gilt.

(b) die Eigenwerte von $h(\mathbf{p})$ und γ_5 gleich ±1 sind.

(c) für $P_\pm^{(h)} = \frac{1\pm h}{2}$ die Beziehungen $(P_\pm^{(h)})^2 = P_\pm^{(h)}$ und $P_+^{(h)}P_-^{(h)} = 0$ gelten.

(d) der Chiralitätseigenwert von $u_L \equiv P_L u$, mit $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$, gleich -1 ist.

[Auf diesem Blatt (und auch sonst) ist übrigens $\vec{p} \equiv \mathbf{p}$.]

Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 04** 3.11.2010

[Besprechung 11.11 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 16: Projektoren?

Handelt es sich bei den zwei Matrizen $P_1 = \left(\begin{smallmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ und $P_2 = \mathbb{1} - P_1$ um Projektionsoperatoren? Wie lauten die Eigenwerte dieser Operatoren?

Aufgabe 17: Phasenraumintegration des Zweikörperzerfalls

Betrachten Sie den Zerfall $A \to 1+2$ im Ruhesystem des Teilchens A. Mit Massen M, m_1, m_2 und $q = (M,\mathbf{0})$, $p_1 = (E_{\mathbf{p}_1},\mathbf{p}_1)$, $p_2 = (E_{\mathbf{p}_2},\mathbf{p}_2)$ beträgt die Zerfallsrate [s. Vorlesung; Skript S.26]

$$\Gamma = \frac{1}{2M}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3\,2E_{\mathbf{p}_1}}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3\,2E_{\mathbf{p}_2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\cdot|\mathcal{M}|^2(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass nach der Integration über $\mathbf{p}_1$ gilt:

$$\Gamma = \frac{1}{2M}\frac{1}{(4\pi)^2}\int\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2\,\frac{\delta\left(M-\sqrt{m_1^2+\mathbf{p}_2^2}-\sqrt{m_2^2+\mathbf{p}_2^2}\right)}{\sqrt{m_1^2+\mathbf{p}_2^2}\,\sqrt{m_2^2+\mathbf{p}_2^2}}\cdot|\mathcal{M}|^2(-\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)\,.$$

(b) Es kann vermutet werden, dass $|\mathcal{M}|^2(-\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)$ nur von $|\mathbf{p}_2|$ abhängig ist, d.h. $|\mathcal{M}|^2(-\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2) \to |\mathcal{M}|^2(|\mathbf{p}_2|)$. Überführen Sie die Zerfallsrate per Winkelintegration in die Form

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi M}\int_0^\infty\mathrm{d}\rho\,\rho^2\,\frac{\delta\left(M-\sqrt{m_1^2+\rho^2}-\sqrt{m_2^2+\rho^2}\right)}{\sqrt{m_1^2+\rho^2}\,\sqrt{m_2^2+\rho^2}}\cdot|\mathcal{M}|^2(\rho)\,.$$

(c) Nehmen Sie nun die Variablensubstitution $\rho \to E \equiv \sqrt{m_1^2+\rho^2}+\sqrt{m_2^2+\rho^2}$ vor. Überzeugen Sie sich davon, dass sich die Zerfallsrate schreiben lässt als

$$\Gamma = \frac{\rho_0}{8\pi M^2}\,|\mathcal{M}|^2(\rho_0)\,\theta(M-m_1-m_2)\,,$$

wobei

$$\rho_0 = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4+m_1^4+m_2^4-2M^2m_1^2-2M^2m_2^2-2m_1^2m_2^2}\,.$$

(d) Was ist die physikalische Bedeutung von ρ_0? [vgl. Aufgabe 5]

Aufgabe 18: Pauli–Matrizen [vgl. Vorlesung; Skript S.13; Griffiths Anhang C]

Betrachten Sie die hermiteschen und spurlosen Matrizen $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, und zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:
(a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{1}_{2\times2}$
(b) $\{\sigma_i,\sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$
(c) $[\,\sigma_i,\sigma_j\,] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$
(d) $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$
(e) $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\;\mathbb{1} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$. [ja, hier ist $\vec{a}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 a_i\sigma_i$]
(f) $e^{i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}} = \cos(a)\mathbb{1} + i\frac{\vec{a}\cdot\vec{\sigma}}{a}\sin(a)$ mit $a = |\vec{a}|$.

Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 05** 10.11.2010

[Besprechung 18.11 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 19: Zerfall $A \to 1+2$

Setzen Sie die Werte $M = m_\rho = 770$ MeV, $m_1 = m_2 = m_\pi = 140$ MeV, und $\mathcal{M} = 2$ GeV ins Resultat der Aufgabe 17(c) ein.

(a) Was erhalten Sie für die Lebensdauer? Vergleichen Sie anschliessend mit der Lebensdauer des physikalischen ρ–Teilchens, die Sie z.B. auf `http://pdg.lbl.gov` finden.

(b) Zeichnen Sie die Zerfallsrate als Funktion von M. Was ist die physikalische Interpretation dieser Struktur?

Aufgabe 20: Rapidität y

Es gibt viele Möglichkeiten für die Auswahl kinematischer Variablen. Wenn z.B. die Strahlrichtung als die z–Achse gewählt wird, definiert man die Rapidität y als

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E+p_z}{E-p_z} \right) .$$

(a) Zeigen Sie, dass der Viererimpuls nun als $p = (\, m_T \cosh(y)\, ,\, p_x\, ,\, p_y\, ,\, m_T \sinh(y)\,)$ geschrieben werden kann, wobei $m_T \equiv \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2}$ als "transversale Masse" bezeichnet wird.

(b) Können Sie (ausgehend von der Additionsformel für Geschwindigkeiten $v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1 v_2}$, wobei z.B. $v_z = \frac{p_z}{E}$) zeigen wie sich zwei Rapiditäten addieren?

Aufgabe 21: Mandelstam–Variablen s, t, u

(a) Zeigen Sie, dass die Mandelstam–Variablen $s \equiv (q_A + q_B)^2$, $t \equiv (q_A - p_1)^2$ und $u \equiv (q_A - p_2)^2$ nicht unabhängig sind:

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_1^2 + m_2^2 \, .$$

(b) Welches ist die kinematisch erlaubte Region in der (s,t)–Ebene, falls $m_A = m_B = m_1 = m_2 \equiv m$ gilt?

Aufgabe 22: Streuung $A + B \to 1+2$

Können Sie, ausgehend vom Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt [vgl. Vorlesung; Skript S.32]

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{2\to 2}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{q}_A|} \frac{|\mathcal{M}|^2(|\mathbf{q}_A|, |\mathbf{p}_1|, \cos\theta)}{(E_A + E_B)^2} ,$$

einen Ausdruck für $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ herleiten [hier ist t nicht Zeit, sondern Mandelstam-Variable], der nur von den Invarianten m_A^2, m_B^2, m_1^2, m_2^2, s, t abhängt?

[Hinweis: starten Sie z.B. mit $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\cos\theta)(\mathrm{d}\cos\theta/\mathrm{d}t) = \ldots$]

Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 06** 17.11.2010

[Besprechung 25.11 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 23: Feynman-Diagramme

Betrachten Sie eine Theorie mit $\hat{\mathcal{L}}_I \equiv g\, \hat{\phi}_A\, \hat{\phi}_B\, \hat{\phi}_C$. Es gelte $m_A > m_B + m_C$, so dass der Zerfall $A \to B + C$ kinematisch erlaubt ist. Zeichnen Sie die Feynman-Diagramme der Ordnungen $\mathcal{O}(g)$, $\mathcal{O}(g^2)$ sowie $\mathcal{O}(g^3)$ für diesen Prozess.

Aufgabe 24: Amplituden in der Quantenelektrodynamik

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist definiert durch $\hat{\mathcal{L}}_I \equiv e\, \hat{\bar{\psi}}\, \gamma^\mu\, \hat{A}_\mu\, \hat{\psi}$, da dieser Term den Positron-Photon-Elektron-Vertex festlegt.

(a) Können Sie in der QED die Amplitude $\mathcal{M}$ für Møller-Streuung, also den Prozess

$$e^-(\mathbf{q}_A, s_3) + e^-(\mathbf{q}_B, s_4) \to e^-(\mathbf{p}_1, s_1) + e^-(\mathbf{p}_2, s_2) ,$$

durch die Spinoren $\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1)$, $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2)$, $u(\mathbf{q}_A, s_3)$ und $u(\mathbf{q}_B, s_4)$ ausdrücken ?

(b) Können Sie in der QED die Amplitude $\mathcal{M}$ für Bhabha-Streuung, also den Prozess

$$e^-(\mathbf{q}_A, s_3) + e^+(\mathbf{q}_B, s_4) \to e^-(\mathbf{p}_1, s_1) + e^+(\mathbf{p}_2, s_2) ,$$

durch die Spinoren $\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1)$, $u(\mathbf{q}_A, s_3)$, $\bar{v}(\mathbf{q}_B, s_4)$ und $v(\mathbf{p}_2, s_2)$ ausdrücken ?

Aufgabe 25: Spuren von Gamma-Matrizen

Zeigen Sie, ausgehend von $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, dass:

(a) $\mathrm{Sp}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$,

(b) $\mathrm{Sp}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = 0$,

(c) $\mathrm{Sp}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4\,(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$,

(d) Die Spur einer *ungeraden* Anzahl von γ-Matrizen ist Null.

Aufgabe 26: Kontraktionen von Gamma-Matrizen

Zeigen Sie, ausgehend von $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, dass:

(a) $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$,

(b) $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu$,

(c) $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = 4g^{\nu\rho}$.

Übungen zu Elementarteilchenphysik — **Blatt Nr. 07** — 24.11.2010

[Besprechung 2.12 in den Übungen   12-14 (D6-135)   16-18 (D6-135)]

Aufgabe 27: Myon-Paarerzeugung $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$

(a) Welche Feynman–Diagramme tragen zu $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ in führender Ordnung bei?
(b) Aus welcher in der Vorlesung vorgeführten Rechnung können Sie daher (ohne weitere Rechnung) auf den totalen Streuquerschnitt $\sigma_{\rm tot}$ für den obigen Prozess schließen? $\sigma_{\rm tot} = ?$

Aufgabe 28: Magnetisches Moment

Das magnetische Moment μ_τ des Tauons hat zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_{EM})$ den gleichen (relativen) Wert wie das magnetische Moment μ_e des Elektrons:

$$\frac{\mu_\tau}{\mu_B(m_e \to m_\tau)} = 1 + \frac{\alpha_{EM}}{2\pi} \,.$$

Könnte es in höheren Ordnungen einen Unterschied geben? Warum?

Aufgabe 29: Mott-Formel

Für $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$ gilt (nach Spinmittelung) [vgl. Vorlesung; Skript S.39]

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{8e^4}{[(q_A - p_1)^2]^2} \Big\{ q_A\!\cdot\! q_B\, p_1\!\cdot\! p_2 + q_A\!\cdot\! p_2\, q_B\!\cdot\! p_1 - m_\mu^2\, q_A\!\cdot\! p_1 - m_e^2\, q_B\!\cdot\! p_2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \Big\} \,.$$

Bestimmen Sie (unter der Annahme $m_\mu \gg m_e$ und ausgehend von obigem $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ und dem lorentzinvarianten Ausdruck $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ aus Aufgabe 22) den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ im Laborsystem (welches in diesem Limes identisch zum Ruhesystem des Myons ist).
Hinweis: In diesem Grenzfall ist $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \propto m_\mu^{-2}(1 + \mathcal{O}(m_\mu^{-2}))\, \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ und weiterhin $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \propto m_\mu^2 (1 + \mathcal{O}(m_\mu^{-2}))$, so dass $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ letztlich unabhängig von m_μ sein sollte.

Aufgabe 30: laufende Kopplung der Quantenchromodynamik (QCD)

Die "laufende Kopplungskonstante" $g_s(Q_E)$ der QCD erfüllt

$$Q_E\, \partial_{Q_E}\, g_s^2(Q_E) = -2\, b_0\, g_s^4(Q_E) \,, \quad \text{für } Q_E \gg 1 \text{ GeV} \,,$$

mit $b_0 \equiv (11N_{\rm c} - 2N_{\rm f})/48\pi^2$ und $N_{\rm c} = N_{\rm f} = 3$. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung. [Hinweis: hier (und auch sonst) ist $\partial_x Y = dY/dx$ gemeint.]

Aufgabe 31: QCD-Skala

Die "QCD-Skala" wird durch

$$\Lambda_{\rm QCD} \equiv \lim_{Q_E \to \infty} Q_E\, \exp\left[-\frac{1}{2\, b_0\, g_s^2(Q_E)} \right]$$

definiert, wobei $g_s^2(Q_E)$ die in Aufgabe 30 ermittelte Lösung ist. Experimente haben gezeigt, dass $\alpha_s(91 \text{ GeV}) = g_s^2(91 \text{ GeV})/4\pi \approx 0.12$. Welchen Wert erhalten Sie damit für $\Lambda_{\rm QCD}$?

Übungen zu Elementarteilchenphysik — **Blatt Nr. 08** — 1.12.2010

[Besprechung 9.12 in den Übungen   12-14 (D6-135)   16-18 (D6-135)]

Aufgabe 32: Tiefinelastische Streuung

(a) Wie hängen (für gegebenes E) Q_E^2,x von E',Θ ab?
(b) Zeigen Sie, dass $0 \le x \le 1$ gilt.

Aufgabe 33: Summenregeln im Partonmodell

Man kann verschiedene "Summenregeln" für die Verteilungsfunktionen der Partonen herleiten. So folgt z.B. aus der Definition des Gesamtimpulses des Protons $\int_0^1 \mathrm{d}x\, x \sum_i f_i(x) = 1$ (vgl. Vorlesung). Betrachten Sie die Verteilungsfunktionen $u_v(x)$, $d_v(x)$, $s(x)$, $\bar{s}(x)$ und $g(x)$. Welche Regeln folgen aus den Tatsachen, dass
(a) das Proton die elektrische Ladung $Q = +1$ hat?
(b) das Proton keine Seltsamkeit S besitzt?

Aufgabe 34:

Seien $P_L \equiv (1 - \gamma_5)/2$, $P_R \equiv (1 + \gamma_5)/2$. Zeigen Sie, dass:
(a) $\bar\psi_1 \gamma_\mu P_L \psi_2 = \bar\psi_1 P_R \gamma_\mu P_L \psi_2$
(b) $\bar\psi_1 P_R \gamma_\mu P_L \psi_2 = \bar\psi_{1L} \gamma_\mu \psi_{2L}$, mit $\psi_{iL} \equiv P_L \psi_i$.

Aufgabe 35: Tadpole–Integral

Betrachten Sie das Integral

$$A(m,\Lambda) \equiv \int_{|\mathbf{k}|<\Lambda} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k_0}{(2\pi)}\, \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \,,$$

wobei $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ und $\varepsilon = 0^+$ ein infinitesimal kleiner positiver Parameter ist. Wie verhält sich $A(m,\Lambda)$ für $\Lambda \gg m$? [Hinweis: das k_0-Integral geht am einfachsten per Residuensatz.]

Übungen zu Elementarteilchenphysik — **Blatt Nr. 09** — 8.12.2010

[Besprechung 16.12 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 36: Pion-Nukleon-Streuung

Betrachten Sie die elastische Pion-Nukleon-Streuung. Es gibt sechs mögliche Prozesse:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p\,, \qquad \pi^0 + p \to \pi^0 + p\,, \qquad \pi^- + p \to \pi^- + p\,,$$
$$\pi^+ + n \to \pi^+ + n\,, \qquad \pi^0 + n \to \pi^0 + n\,, \qquad \pi^- + n \to \pi^- + n\,.$$

Wieviele unabhängige Amplituden gibt es in diesen Streuprozessen unter der Annahme der (exakten) Isospinsymmetrie? [Hinweis: Pionen haben $I = 1$, Nukleonen $I = 1/2$.]

Aufgabe 37: Pion-Zerfall

Nehmen Sie an, dass die Elektronmasse m_e gleich null ist. Warum kann der Zerfall $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ dann nicht stattfinden?
[Dies ist eine Erklärung dafür, dass $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $(\Gamma_i/\Gamma = 99.99\%)$ sehr viel häufiger als $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ $(\Gamma_i/\Gamma = 0.01\%)$ auftritt.]

Aufgabe 38: CP-Eigenzustände

Für die zu den zwei neutralen Kaonen $K^0 = d\bar{s}$ und $\bar{K}^0 = s\bar{d}$ gehörigen Zustände gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \hat{P}|K^0\rangle &= -|K^0\rangle\,, \qquad & \hat{P}|\bar{K}^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle\,, \\ \hat{C}|K^0\rangle &= |\bar{K}^0\rangle\,, \qquad & \hat{C}|\bar{K}^0\rangle &= |K^0\rangle\,. \end{aligned}$$

(a) Können Sie durch Linearkombinationen von $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ $\hat{C}\hat{P}$-Eigenzustände konstruieren?
(b) Welcher dieser Zustände könnte in zwei, welcher in drei Pionen zerfallen, falls CP erhalten bleibt?
(c) Warum können diese Reaktionen nicht innerhalb der QCD auftreten?

Aufgabe 39: Myon-Zerfall

Was sind, laut V-A Fermi-Modell, das Feynman-Diagramm und die Amplitude $\mathcal{M}$ für den Myon-Zerfall $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$?

Aufgabe 40: schwache Feinstrukturkonstante

Welchen Wert erhalten Sie für die schwache Feinstrukturkonstante $\alpha_w = g_w^2/(4\pi)$, wobei $g_w^2 = 4\sqrt{2}m_W^2 G_F$ ist? Vergleichen Sie diesen Wert mit α_{EM} und α_s. Warum sind schwache Wechselwirkungen eigentlich "schwach"?

Übungen zu Elementarteilchenphysik — **Blatt Nr. 10** — 15.12.2010

[Besprechung 23.12.09 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 41: K^+-Lebensdauer

Was erhalten Sie, ausgehend von Aufgabe 17c, dem Fermi-Modell und dimensionaler Analyse, für die Größenordnung der Lebensdauer des K^+? Vergleichen Sie mit dem Resultat der Aufgabe 19a, in der wir starke Zerfälle betrachtet hatten.
[Hinweis: betrachten Sie Zerfälle wie $K^+ \to \pi^+\pi^0$, und vernachlässigen Sie m_π.]

Aufgabe 42: GIM-Mechanismus

Betrachten Sie den Zerfall $K^0 \to \mu^+\mu^-$, wobei $K^0 = d\bar{s}$. Diese Reaktion verlangt eine Umwandlung $d \to u \to s$ oder $d \to c \to s$, so dass sich s und $\bar{s}$ gegenseitig vernichten können, um am Ende nur Leptonen zu haben. Zeigen Sie, ausgehend vom V-A Fermi-Modell, dass sich die zwei genannten Kanäle gegeneinander kürzen.
[Diese Tatsache ist als "GIM-Mechanismus" (Glashow-Iliopoulos-Maiani) bekannt: das vierte Quark c wird eingeführt, um die sehr kleine Zerfallsrate $\Gamma(K^0 \to \mu^+\mu^-)$ zu erklären.]
Warum ist die Kürzung in der Natur allerdings nicht exakt?

Aufgabe 43: Bubble–Integral

Betrachten Sie – in Analogie zu Aufgabe 35 – diesmal

$$B(m,q,\Lambda) \equiv \int_{|\mathbf{k}|<\Lambda} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k_0}{(2\pi)} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\varepsilon]\,[(q+k)^2 - m^2 + i\varepsilon]}\,,$$

wobei wiederum $\varepsilon = 0^+$. Wie verhält sich $B(m,q,\Lambda)$ für $\Lambda \gg m, q_0, |\mathbf{q}|$? [Hinweis: Sollte Ihnen diese Aufgabe so zu schwer fallen, können Sie $q^2 \ll m^2$ annehmen und eine Taylor-Entwicklung in q^2 durchführen.]

Aufgabe 44: Eichtransformation

Angenommen die Felder $\hat{\phi}$ und $\hat{A}_\mu$ transformieren (unter sog. „Eichtransformationen") gemäß

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(x) &\to \hat{A}'_\mu(x) = \hat{A}_\mu(x) + \frac{1}{e}\,\partial_\mu\,\alpha(x)\,, \\ \hat{\phi}(x) &\to \hat{\phi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\,\hat{\phi}(x)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv (\hat{D}_\mu\hat{\phi})^\dagger\,(\hat{D}^\mu\hat{\phi})$$

mit $\hat{D}_\mu \equiv \partial_\mu - ie\hat{A}_\mu$ „eichinvariant" ist, d.h. dass $\hat{\mathcal{L}}' = \hat{\mathcal{L}}$ gilt.

Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 11** 22.12.2010

[Besprechung 13.1 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 45: $SU(2)$ Eichtransformationen

Eine allgemeine $SU(2)$-Transformation kann als $\hat{\Phi} \to \hat{\Phi}' = U\hat{\Phi}$ geschrieben werden, wobei

$$U = \mathbb{1}_{2\times 2} \cdot \cos|\theta| + i\,\sigma^a\,\frac{\theta^a}{|\theta|} \cdot \sin|\theta| \qquad \text{sowie} \qquad |\theta| \equiv \left(\sum_{a=1}^{3} \theta^a\theta^a\right)^{1/2} .$$

Hier sind σ^a mit $a = 1, 2, 3$ die drei Pauli-Matrizen (s. Aufgabe 18).

(a) Zeigen Sie, dass U wirklich eine $SU(2)$-Matrix ist [d.h. dass $U^\dagger U = \mathbb{1}_{2\times 2}$ und det$(U) = 1$].

(b) Wie transformiert sich $\hat{\tilde{\Phi}} \equiv i\sigma^2\hat{\Phi}^*$?

Aufgabe 46: $U(1)$ Eichtransformationen

Die Felder $\{\hat{Q}'_{1L},\ \hat{\Phi},\ \hat{u}_R,\ \hat{d}_R\}$ haben jeweils die Hyperladungen $Q_Y = \{-1/6, -1/2, -2/3, 1/3\}$. Zeigen Sie, dass sowohl

$$\hat{\bar{Q}}'_{1L}\,\hat{\tilde{\Phi}}\,\hat{u}_R \qquad \text{als auch} \qquad \hat{\bar{Q}}'_{1L}\,\hat{\Phi}\,\hat{d}_R$$

invariant bezüglich der Hyperladungs-Eichsymmetrie $U(1)_Y$ sind.

Aufgabe 47: schwacher Mischungswinkel und Vektorbosonmasse

(a) Sie kennen aus Aufgabe 40 den Wert von g_w, und aus $\alpha_{\rm EM} = e^2/4\pi$ den Wert von e. Falls nun $e = g_w \sin\theta_w$ definiert wird, erhalten Sie daraus $\sin\theta_w =$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem im PDG–Booklet angegebenen Wert.

(b) Was ist, ausgehend von Teil (a), die Vorhersage des Standardmodells für m_Z/m_W? Vergleichen Sie mit dem Experiment (bzw. dem PDG-Booklet). Was erhalten Sie für den Parameter v in $m_W = g_w v/2$? [Diese Größe ist als "Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes" bekannt.]

Aufgabe 48: globale Symmetrie

Betrachten Sie ein Potential wie im Standardmodell, $V(\hat{\Phi}) = -\mu^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi} + \lambda(\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi})^2$, aber jetzt im Falle einer "globalen" Symmetrie, wobei

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \hat{\phi}_2 + i\hat{\phi}_3 \\ v + \hat{\phi}_0 + i\hat{\phi}_1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Massen der vier Teilchen $\hat{\phi}_0$, $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$, $\hat{\phi}_3$. Warum kann es in der Natur keine (bei den typischen Energieskalen der Teilchenphysik) spontan gebrochene globale Symmetrie geben?

Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 12** 12.1.2011

[Besprechung 20.1 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 49: Freiheitsgrade

Wie viele physikalische Freiheitsgrade (bzw. Polarisationszustände) tragen $W^\pm$, Z und die Skalarteilchen in $\hat{\Phi}$

(a) ohne spontane Symmetriebrechung?

(b) mit spontaner Symmetriebrechung?

Aufgabe 50: SM–Parameter

(a) Schreiben Sie bitte den Parameter λ des Higgs-Potentials $V(\hat{\Phi})$ als Funktion von g_w, m_W und der Higgs-Masse m_H.

(b) Sogenannte "supersymmetrische" Theorien sagen aus, dass $\lambda \lesssim g_w^2/2$. Welche Vorhersage erhalten Sie daraufhin für m_H?

Aufgabe 51: Matrizen

(a) Wie viele unabhängige Parameter gibt es in der allgemeinen (reellen) orthogonalen 3×3-Matrix $Q \in O(3)$? [Also $O^T = O^{-1}$.] Wie viele sind es im Fall N×N?

(b) Wie viele unabhängige reelle Parameter gibt es in der allgemeinen unitären 3×3-Matrix $U \in U(3)$? [Also $U^\dagger = U^{-1}$.] Wie viele sind es im Fall N×N?

(c) Zeigen Sie, dass die durch vier reelle Parameter $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta\}$ parametrisierte CKM-Matrix

$$V_{\rm CKM} \equiv \begin{pmatrix} c_1c_3 & s_1c_3 & s_3e^{-i\delta} \\ -s_1c_2 - c_1s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2 - s_1s_2s_3e^{i\delta} & s_2c_3 \\ s_1s_2 - c_1c_2s_3e^{i\delta} & -c_1s_2 - s_1c_2s_3e^{i\delta} & c_2c_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} c_i = \cos(\theta_i) \\ s_i = \sin(\theta_i) \end{matrix}$$

(vgl. PDG Booklet, S.181) ein Element der Gruppe $SU(3)$ ist. [Also $V^\dagger = V^{-1}$, det$V = 1$.]

Aufgabe 52: Higgs–Zerfall

Nehmen Sie an, dass Higgs-Teilchen eine Masse von $120\,GeV$ besitzen und durch Yukawa-Wechselwirkungen zerfallen. Was wäre der wichtigste Zerfallskanal?

Aufgabe 53: Chirale Transformation

Betrachten Sie einen Massenterm der Form

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -\frac{v}{\sqrt{2}}\left[h_u\,\hat{\bar{u}}_L\hat{u}_R + h_u^*\,\hat{\bar{u}}_R\hat{u}_L\right] .$$

Mit welcher Phasentransformation des Quarkoperators $\hat{u}$ kann man h_u als eine reelle Kopplungskonstante redefinieren? [Diese Phasentransformation wird *chirale Transformation* genannt.]

Übungen zu Elementarteilchenphysik **Blatt Nr. 13** 19.1.2011

[Besprechung 27.1 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 54: SSB

Als ein einfaches Beispiel einer spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrie betrachten Sie zwei (reelle) Felder $\phi_{1,2}$, mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L}[\phi_1,\phi_2] = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) + \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2 \,.$$

$\mathcal{L}$ ist invariant unter Rotationen im ϕ-Raum (also unter SO(2): $\phi_1 \to \cos(\theta)\phi_1 + \sin(\theta)\phi_2$ etc).

(a) Bestimmen Sie die Minima des Potentials und führen Sie zwei neue Felder $\eta_{1,2}$ ein, um $\mathcal{L}$ um einen *bestimmten* Grundzustand zu entwickeln. Geben Sie das neue $\mathcal{L}[\eta_1,\eta_2]$ an und lesen Sie die Massen der den Feldern $\eta_{1,2}$ entsprechenden Teilchen ab.

(b) Welche Wechselwirkungen haben $\eta_{1,2}$ (zeichnen!)?

(c) Jemand hat statt Ihrer neuen Felder aus (a) die Kombinationen $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+\eta_2)$ und $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1-\eta_2)$ als neue Felder gewählt. $\mathcal{L}[\xi_1,\xi_2] = ?$ Wieviele massive Felder hat man nun?

Aufgabe 55: Vereinheitlichung in höheren Dimensionen

Schon lange bevor die starken und schwachen Wechselwirkungen bekannt waren, versuchte man die damals bekannten Wechselwirkungen, d.h. den klassischen Elektromagnetismus und die Schwerkraft, zu vereinheitlichen. Einer der ersten Entwürfe (G. Nordström, 1914) enthielt die Maxwell-Gleichungen und einen Konkurrenten für Einsteins allgemeine Relativitätstheorie, wobei das Graviton dort ein Spin-0- statt ein Spin-2-Feld war.

(a) Schreiben Sie die Maxwell-Gleichungen in 1+4 Dimensionen.

(b) Sei das Potential gegeben durch $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$, mit $A_4 \equiv \Phi$. Zeigen Sie unter der Annahme, dass die Komponenten A_μ unabhängig von x_4 sind, dass man die Maxwell-Gleichungen in 1+3 Dimensionen (Elektromagnetismus) und zusätzlich eine Gleichung für Φ (Graviton) erhält.

(c) Können Sie sich vorstellen, wie die Annahme, dass die A_μ unabhängig von x_4 sind, gerechtfertigt werden kann?

Aufgabe 56: Proton-Zerfall

Der Zerfall von Protonen in Theorien der großen Vereinheitlichung

$$p^+ \to e^+\pi^0$$

ähnelt sehr dem Zerfall $K^+ \to \pi^+\pi^0$ in der schwachen Wechselwirkung (vgl. Aufgabe 41). Nehmen Sie an, dass die "Feinstrukturkonstante" α_{GUT} gleich α_W ist. Wie groß sollte dann die Masse m_{GUT} des neuen Vektorbosons sein, um $\tau_p > 5\times 10^{33}\ y$ zu erhalten?

[Hinweis: Übersetzen Sie das Ergebnis von A41 auf den hier untersuchten Fall: $G_F \sim m_W$, jetzt wird die Rolle von W aber vom X gespielt; statt $m_K \gg m_\pi$ ist jetzt $m_p \gg m_{\pi,e}$, also können Sie m_π und m_e vernachlässigen.]