

### Aufgabe 54: SSB

Als ein einfaches Beispiel einer spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrie betrachten Sie zwei (reelle) Felder  $\phi_{1,2}$ , mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L}[\phi_1, \phi_2] = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) + \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2.$$

$\mathcal{L}$  ist invariant unter Rotationen im  $\phi$ -Raum (also unter  $SO(2)$ :  $\phi_1 \rightarrow \cos(\theta)\phi_1 + \sin(\theta)\phi_2$  etc).

(a) Bestimmen Sie die Minima des Potentials und führen Sie zwei neue Felder  $\eta_{1,2}$  ein, um  $\mathcal{L}$  um einen *bestimmten* Grundzustand zu entwickeln. Geben Sie das neue  $\mathcal{L}[\eta_1, \eta_2]$  an und lesen Sie die Massen der den Feldern  $\eta_{1,2}$  entsprechenden Teilchen ab.

(b) Welche Wechselwirkungen haben  $\eta_{1,2}$  (zeichnen!)?

(c) Jemand hat statt Ihrer neuen Felder aus (a) die Kombinationen  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_2)$  und  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_2)$  als neue Felder gewählt.  $\mathcal{L}[\xi_1, \xi_2] = ?$  Wieviele massive Felder hat man nun?

### Aufgabe 55: Vereinheitlichung in höheren Dimensionen

Schon lange bevor die starken und schwachen Wechselwirkungen bekannt waren, versuchte man die damals bekannten Wechselwirkungen, d.h. den klassischen Elektromagnetismus und die Schwerkraft, zu vereinheitlichen. Einer der ersten Entwürfe (G. Nordström, 1914) enthielt die Maxwell-Gleichungen und einen Konkurrenten für Einsteins allgemeine Relativitätstheorie, wobei das Graviton dort ein Spin-0- statt ein Spin-2-Feld war.

(a) Schreiben Sie die Maxwell-Gleichungen in 1+4 Dimensionen.

(b) Sei das Potential gegeben durch  $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ , mit  $A_4 \equiv \Phi$ . Zeigen Sie unter der Annahme, dass die Komponenten  $A_\mu$  unabhängig von  $x_4$  sind, dass man die Maxwell-Gleichungen in 1+3 Dimensionen (Elektromagnetismus) und zusätzlich eine Gleichung für  $\Phi$  (Graviton) erhält.

(c) Können Sie sich vorstellen, wie die Annahme, dass die  $A_\mu$  unabhängig von  $x_4$  sind, gerechtfertigt werden kann?

### Aufgabe 56: Proton-Zerfall

Der Zerfall von Protonen in Theorien der großen Vereinheitlichung

$$p^+ \rightarrow e^+ \pi^0$$

ähnelt sehr dem Zerfall  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$  in der schwachen Wechselwirkung (vgl. Aufgabe 41). Nehmen Sie an, dass die "Feinstrukturkonstante"  $\alpha_{GUT}$  gleich  $\alpha_W$  ist. Wie groß sollte dann die Masse  $m_{GUT}$  des neuen Vektorbosons sein, um  $\tau_p > 5 \times 10^{33} y$  zu erhalten?

[Hinweis: Übersetzen Sie das Ergebnis von A41 auf den hier untersuchten Fall:  $G_F \sim m_W$ , jetzt wird die Rolle von  $W$  aber vom  $X$  gespielt; statt  $m_K \gg m_\pi$  ist jetzt  $m_p \gg m_{\pi, e}$ , also können Sie  $m_\pi$  und  $m_e$  vernachlässigen.]