Übungen zu Elementarteilchenphysik	**Blatt Nr. 04**	3.11.2010

[Besprechung 11.11 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 16: Projektoren?

Handelt es sich bei den zwei Matrizen $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $P_2 = \mathbb{1} - P_1$ um Projektionsoperatoren? Wie lauten die Eigenwerte dieser Operatoren?

Aufgabe 17: Phasenraumintegration des Zweikörperzerfalls

Betrachten Sie den Zerfall $A \to 1 + 2$ im Ruhesystem des Teilchens A. Mit Massen M, m_1, m_2 und $q = (M, \mathbf{0})$, $p_1 = (E_{\mathbf{p}_1}, \mathbf{p}_1)$, $p_2 = (E_{\mathbf{p}_2}, \mathbf{p}_2)$ beträgt die Zerfallsrate [s. Vorlesung; Skript S.26]

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3\, 2E_{\mathbf{p}_1}} \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3\, 2E_{\mathbf{p}_2}} \, (2\pi)^4 \, \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q) \cdot |\mathcal{M}|^2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass nach der Integration über $\mathbf{p}_1$ gilt:

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \frac{1}{(4\pi)^2} \int \mathrm{d}^3\mathbf{p}_2 \, \frac{\delta\left(M - \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_2^2} - \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2}\right)}{\sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_2^2}\,\sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2}} \cdot |\mathcal{M}|^2(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2) \,.$$

(b) Es kann vermutet werden, dass $|\mathcal{M}|^2(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2)$ nur von $|\mathbf{p}_2|$ abhängig ist, d.h. $|\mathcal{M}|^2(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2) \to |\mathcal{M}|^2(|\mathbf{p}_2|)$. Überführen Sie die Zerfallsrate per Winkelintegration in die Form

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi M} \int_0^\infty \mathrm{d}\rho \, \rho^2 \, \frac{\delta\left(M - \sqrt{m_1^2 + \rho^2} - \sqrt{m_2^2 + \rho^2}\right)}{\sqrt{m_1^2 + \rho^2}\,\sqrt{m_2^2 + \rho^2}} \cdot |\mathcal{M}|^2(\rho) \,.$$

(c) Nehmen Sie nun die Variablensubstitution $\rho \to E \equiv \sqrt{m_1^2 + \rho^2} + \sqrt{m_2^2 + \rho^2}$ vor. Überzeugen Sie sich davon, dass sich die Zerfallsrate schreiben lässt als

$$\Gamma = \frac{\rho_0}{8\pi M^2} \; |\mathcal{M}|^2(\rho_0) \, \theta(M - m_1 - m_2) \,,$$

wobei

$$\rho_0 = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2} \,.$$

(d) Was ist die physikalische Bedeutung von ρ_0? [vgl. Aufgabe 5]

Aufgabe 18: Pauli–Matrizen [vgl. Vorlesung; Skript S.13; Griffiths Anhang C]

Betrachten Sie die hermiteschen und spurlosen Matrizen $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, und zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:

(a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{1}_{2\times 2}$

(b) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$

(c) $[\,\sigma_i, \sigma_j\,] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

(d) $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

(e) $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\ \mathbb{1} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}\,)$ für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$. [ja, hier ist $\vec{a}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 a_i\sigma_i$]

(f) $e^{\,i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}} = \cos(a)\mathbb{1} + i\frac{\vec{a}\cdot\vec{\sigma}}{a}\sin(a)$ mit $a = |\vec{a}|$.