Übungen zu Elementarteilchenphysik	**Blatt Nr. 03**	27.10.2010

[Besprechung 4.11 in den Übungen 12-14 (D6-135) 16-18 (D6-135)]

Aufgabe 11: Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung angegebene Lösung $\hat{\phi}(x) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_\mathbf{p}}} \left(\hat{a}_\mathbf{p}\, e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\, e^{ipx} \right)$ die Vertauschungsrelation $\left[\hat{\phi}(t,\mathbf{x}), \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(t,\mathbf{y}) \right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ erfüllt.

Aufgabe 12: Klein-Gordon-Gleichung $[\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2]\,\phi = 0$

Zeigen Sie dass $Q \equiv i \int d^3\mathbf{x}\, (\phi^*\, \partial_0\, \phi - \phi\, \partial_0\, \phi^*)$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 13: Dirac–Gleichung $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

(a) Zeigen Sie: Der Dirac–adjungierte Spinor $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ erfüllt $\bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0\,.$
(b) Ist die Ladung $Q \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \bar{\psi}\gamma_0\psi$ eine Erhaltungsgröße?

Aufgabe 14: Normierung der Dirac–Lösung

Betrachten Sie die Spinoren

$$u(\mathbf{p},s) = c_1(\not{p} + m)\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ v(\mathbf{p},s) = c_2(\not{p} - m)\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \xi_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \xi_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Normierungen $\bar{u}(\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s') = 2m\delta_{s,s'}$ sowie $\bar{v}(\mathbf{p},s)v(\mathbf{p},s') = -2m\delta_{s,s'}$ durch $c_1 = -c_2 = (E_\mathbf{p} + m)^{-1/2}$ erfüllt werden können.
Was folgt dann für $u^\dagger(\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s')$ und $v^\dagger(\mathbf{p},s)v(\mathbf{p},s')$?

Aufgabe 15: Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren

Betrachten wir den Helizitätsoperator $h(\mathbf{p}) = \mathbf{e}_\mathbf{p} \cdot \vec{\Sigma}$ sowie den Chiralitätsoperator γ_5, wobei

$$\mathbf{e}_\mathbf{p} \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad , \quad \vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \mathrm{Pauli-Matrizen}\,.$$

Zeigen Sie, dass

(a) $h^2(\mathbf{p}) = \mathbb{1}_{4\times 4}$ gilt.

(b) die Eigenwerte von $h(\mathbf{p})$ und γ_5 gleich ± 1 sind.

(c) für $P_\pm^{(h)} = \frac{1 \pm h}{2}$ die Beziehungen $(P_\pm^{(h)})^2 = P_\pm^{(h)}$ und $P_+^{(h)} P_-^{(h)} = 0$ gelten.

(d) der Chiralitätseigenwert von $u_L \equiv P_L u$, mit $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$, gleich -1 ist.

[Auf diesem Blatt (und auch sonst) ist übrigens $\vec{p} \equiv \mathbf{p}\,$.]