Elementarteilchenphysik

YS, E6-118, 6211

www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/tp10

1.0 Organisatorisches

Vorl	Mo	12.15 - 14	(D01 - 249)		Start: 11. Okt. 10
	Mi	10.15 - 12	"		
Übg	Do	12 - 14	(D6 - 135)	Jan Möller	Start: 21. Okt. 10
	Do	16 - 18	"	Anthony Francis	

Regeln V Anw + Ü Anw + Ü aktiv (vorrechnen) + mdl. Prfg

|——————| 4 LP

|——————————————| 6 LP

|————————————————————| 9 LP

Literatur s. Semesterapparat

z.B.: Griffiths, Introduction to Elementary Particles

Cottingham/Greenwood, Introduction to the SM (Standard Model) of Particle Physics

Nachtmann, Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik

Halzen/Martin, Quarks and Leptons

Burgess/Moore, The SM (fortgeschritten)

Bib QE 200 : meterweise...

1.1 Einleitung

Ziele dieser Vorl:

- Formulierung der Theorie des Standardmodells (SM)
- (Quanten-) Feldtheorie, Feynmanregeln
- Phänomenologie des SM
- Einfache quantitative Aussagen herleiten
  - z.B. Wirkungsquerschnitte, Zerfallsraten ~ 1.Ord. Stö.
- Diskussion von Ideen zur Erweiterung des SM

Was diese Vorl nicht bietet

- Quantenfeldtheorie (→ SS 2011 ; ≳6. Sem.)
- Historische Entwicklung des SM (→ s. z.B. [Griffiths, S. 13-52])
- Beschreibung der experimentellen Apparaturen + Daten (→ s. z.B. [Perkins])

als kleiner Appetizer: → [einleitung.pdf]

↳ ∋ Teilchen; Wechselwirkungen; SM

unbekannte Teile des SM

- Higgs-Boson
  gibt den anderen Teilchen Masse
  könnte schwer sein ; exp. Suche läuft ($E = mc^2$)
- Massenspektrum der Neutrinos ν
  könnte Bedeutung für Expansionsrate des Universums haben
  viele Experimente zur Massenbestimmung

Fragen, die über das SM hinausgehen

- Quantengravitation ?
  wichtig z.B. im Innern von schwarzen Löchern
- (mathematische) Eleganz ?
  warum drei Familien / verschiedene Ww / verschiedene Massen / ...
- SM bricht bei sehr hohen E zusammen
  Problem von "Divergenzen" in QFT-Rechnungen

Ideen jenseits des SM

- String theorie
  Teilchen → Fäden + Vibrationen ↙ exp. Nachweis ?!
  $\ni$ Quantengrav. (?) ; $\exists$ zusätzliche Dimensionen
- Supersymmetrie ↙ exp. Nachweis ?!
  Teilchen → 2x Teilchen ; Fermionen ↔ Bosonen
  könnten "Dunkle Materie" sein
- GUT's
  mathemat. Struktur des SM vereinheitlichen / herleiten
  sagt z.B. Instabilität des Protons voraus ← exp. Nachweis ?!

1.2 Inventar des SM

→ offizielle Liste der Elementarteilchen + deren Eigenschaften:
Particle Data Group ; pdg.lbl.gov →[pdgExamplePages.pdf]

Eigenschaften ?

Masse
Lebensdauer bzw Zerfallsrate
Zerfallskanäle (← bestimmt die Ww's des SM)
innere Struktur bzw Quantenzahlen

Spin (Eigendrehimpuls) J ((Fermionen $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ Bosonen $0, 1, \ldots$))
el. Ladung Q (in Einheiten von e)
Parität $P = \pm 1$
Ladungskonjugation $C = \pm 1$
Flavor-Quantenzahlen

Isospin I_3 (($= +\frac{1}{2}$ (u) , $-\frac{1}{2}$ (d)))
Strangeness S : (($= -1$ (s) , 0 (sonst)))
Charmness C (($= +1$ (c) , ÷))
Bottomness B (($= -1$ (b) , ÷))
Topness T (($= +1$ (t) , ÷))

Leptonzahl L (($= +1$ ($e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) , ÷))
Baryonzahl B (($= +\frac{1}{3}$ (u, d, c, s, t, b) , ÷))

→ einige der Quantenzahlen sind bei allen Reaktionen exakt erhalten, einige nur in der starken Ww.

Antiteilchen ?

Masse, Lebensdauer, Spin wie Teilchen
andere Quantenzahlen meist entgegengesetzt
Bezeichnung: z.B. $\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\nu}_e$, e^+, μ^+, ...

Hadronen (unterliegen der starken Ww)

Mesonen $q\bar{q}$-Systeme , z.B. $\pi^+(u\bar{d})$, $K^0(d\bar{s})$, ... } viele!
Baryonen qqq-Systeme , z.B. p(uud) , n(udd) , ... } → PDG

Leptonen (spüren starke Ww nicht)

e^-, μ^-, τ^- ; ν_e, ν_μ, ν_τ

1.3 Einheiten

früher: CGS (centimeter - gram - second)
$\rightarrow$ MKS (Meter - Kilogramm - Sekunde)
A (Ampere)

nennt man jetzt SI (Système International d'unités)

Energie SI: $J = \frac{kg\, m^2}{s^2}$

Teilchenphys.: $eV = 1.602 \cdot 10^{-19}\, CV = 1.602 \cdot 10^{-19}\, J$

$1\, GeV = 10^9\, eV$

Impuls SI: $|\vec{p}| = \frac{kg\, m}{s}$

Teilchenphys.: $E = \sqrt{(\underbrace{mc^2}_{\equiv m_{neu}})^2 + |\underbrace{\vec{p}c}_{\equiv \vec{p}_{neu}}|^2}$; $[\vec{p}_{neu}] = GeV$

Masse $\equiv m_{neu}$; $[m_{neu}] = GeV$

Geschwindigkeit $v_{neu} = \frac{p_{neu}}{E} = \frac{p_{alt} \cdot c}{E} = \frac{v_{alt}}{c} = \beta_{alt}$

Lebensdauer $[\tau] = s$

Zerfallsrate $\Gamma \equiv \frac{1}{\tau}$; $[\Gamma] = \frac{1}{s}$ (neu: s.u.)

Länge $[l] = fm = fermi = 10^{-15} m$

wir wissen aus QM: Länge $\hat{=}$ Impuls

$\vec{p}_{alt} = \hbar \vec{k} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda_{alt}} \vec{e}_k$; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ← Planck'sche Konst.

$l_{neu} \equiv \frac{l_{alt}}{\hbar c}$

z.B. $\frac{fm}{\hbar c} = \frac{10^{-15} m}{1.0546 \cdot 10^{-34}\, Js \cdot 2.9979 \cdot 10^8\, m/s} = \frac{1}{197.3\, MeV}$

$((\Rightarrow GeV \cdot fm \approx 5\, \hbar c))$

Zerfallsrate $\Gamma_{neu} \equiv \hbar \Gamma_{alt}$; z.B. $\frac{\hbar}{10^{-23} s} = \frac{10^{23}}{s} \cdot 1.0546 \cdot 10^{-34}\, Js = 65.8\, MeV$

Temperatur $T_{neu} \equiv k_B T_{alt}$; z.B. $10^4 K \cdot k_B = 10^4 K \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} = 0.861 eV$

$\Rightarrow$ ab jetzt: wir schreiben alle Gln. in den neuen Größen

alles hat Dimension von Energie

"natürliche Einheiten", $\boxed{\hbar = c = k_B = 1}$

Volume 667, Issues 1–5, 18 September 2008
ISSN 0370-2693

ELSEVIER

PHYSICS LETTERS B

REVIEW OF PARTICLE PHYSICS

July 2008

COMPLETE VOLUME

Available online at
ScienceDirect
www.sciencedirect.com

http://www.elsevier.com/locate/physletb

SUMMARY TABLES OF PARTICLE PROPERTIES

Extracted from the Particle Listings of the
Review of Particle Physics
C. Amsler *et al.*, PL **B667**, 1 (2008)
Available at `http://pdg.lbl.gov`

Particle Data Group
C. Amsler, M. Doser, M. Antonelli, D.M. Asner, K.S. Babu, H. Baer, H.R. Band, R.M. Barnett, E. Bergren, J. Beringer, G. Bernardi, W. Bertl, H. Bichsel, O. Biebel, P. Bloch, E. Blucher, S. Blusk, R.N. Cahn, M. Carena, C. Caso, A. Ceccucci, D. Chakraborty, M.-C. Chen, R.S. Chivukula, G. Cowan, O. Dahl, G. D'Ambrosio, T. Damour, A. de Gouvêa, T. DeGrand, B. Dobrescu, M. Drees, D.A. Edwards, S. Eidelman, V.D. Elvira, J. Erler, V.V. Ezhela, J.L. Feng, W. Fetscher, B.D. Fields, B. Foster, T.K. Gaisser, L. Garren, H.-J. Gerber, G. Gerbier, T. Gherghetta, G.F. Giudice, M. Goodman, C. Grab, A.V. Gritsan, J.-F. Grivaz, D.E. Groom, M. Grünewald, A. Gurtu, T. Gutsche, H.E. Haber, K. Hagiwara, C. Hagmann, K.G. Hayes, J.J. Hernández-Rey, K. Hikasa, I. Hinchliffe, A. Höcker, J. Huston, P. Igo-Kemenes, J.D. Jackson, K.F. Johnson, T. Junk, D. Karlen, B. Kayser, D. Kirkby, S.R. Klein, I.G. Knowles, C. Kolda, R.V. Kowalewski, P. Kreitz, B. Krusche, Yu.V. Kuyanov, Y. Kwon, O. Lahav, P. Langacker, A. Liddle, Z. Ligeti, C.-J. Lin, T.M. Liss, L. Littenberg, J.C. Liu, K.S. Lugovsky, S.B. Lugovsky, H. Mahlke, M.L. Mangano, T. Mannel, A.V. Manohar, W.J. Marciano, A.D. Martin, A. Masoni, D. Milstead, R. Miquel, K. Mönig, H. Murayama, K. Nakamura, M. Narain, P. Nason, S. Navas, P. Nevski, Y. Nir, K.A. Olive, L. Pape, C. Patrignani, J.A. Peacock, A. Piepke, G. Punzi, A. Quadt, S. Raby, G. Raffelt, B.N. Ratcliff, B. Renk, P. Richardson, S. Roesler, S. Rolli, A. Romaniouk, L.J. Rosenberg, J.L. Rosner, C.T. Sachrajda, Y. Sakai, S. Sarkar, F. Sauli, O. Schneider, D. Scott, W.G. Seligman, M.H. Shaevitz, T. Sjöstrand, J.G. Smith, G.F. Smoot, S. Spanier, H. Spieler, A. Stahl, T. Stanev, S.L. Stone, T. Sumiyoshi, M. Tanabashi, J. Terning, M. Titov, N.P. Tkachenko, N.A. Törnqvist, D. Tovey, G.H. Trilling, T.G. Trippe, G. Valencia, K. van Bibber, M.G. Vincter, P. Vogel, D.R. Ward, T. Watari, B.R. Webber, G. Weiglein, J.D. Wells, M. Whalley, A. Wheeler, C.G. Wohl, L. Wolfenstein, J. Womersley, C.L. Woody, R.L. Workman, A. Yamamoto, W.-M. Yao, O.V. Zenin, J. Zhang, R.-Y. Zhu, P.A. Zyla

Technical Associates:
G. Harper, V.S. Lugovsky, P. Schaffner

(Approximate closing date for data: January 15, 2008)

GAUGE AND HIGGS BOSONS

γ $I(J^{PC}) = 0,1(1^{--})$

Mass $m < 1 \times 10^{-18}$ eV
Charge $q < 5 \times 10^{-30}$ e
Mean life τ = Stable

g **or gluon** $I(J^P) = 0(1^-)$

Mass $m = 0$ [a]
SU(3) color octet

W $J = 1$

Charge $= \pm 1$ e
Mass $m = 80.398 \pm 0.025$ GeV
$m_Z - m_W = 10.4 \pm 1.6$ GeV
$m_{W^+} - m_{W^-} = -0.2 \pm 0.6$ GeV
Full width $\Gamma = 2.141 \pm 0.041$ GeV
$\langle N_{\pi^\pm} \rangle = 15.70 \pm 0.35$
$\langle N_{K^\pm} \rangle = 2.20 \pm 0.19$
$\langle N_p \rangle = 0.92 \pm 0.14$
$\langle N_{\text{charged}} \rangle = 19.39 \pm 0.08$

W^- modes are charge conjugates of the modes below.

W^+ DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$\ell^+ \nu$	[b]	(10.80 ± 0.09) %		–
$e^+ \nu$		(10.75 ± 0.13) %		40199
$\mu^+ \nu$		(10.57 ± 0.15) %		40199
$\tau^+ \nu$		(11.25 ± 0.20) %		40179
hadrons		(67.60 ± 0.27) %		–
$\pi^+ \gamma$		$< 8 \times 10^{-5}$	95%	40199
$D_s^+ \gamma$		$< 1.3 \times 10^{-3}$	95%	40175
cX		(33.4 ± 2.6) %		–
$c\overline{s}$		$(31 {}^{+13}_{-11})$ %		–
invisible	[c]	(1.4 ± 2.8) %		–

Z $J = 1$

Charge $= 0$
Mass $m = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV [d]
Full width $\Gamma = 2.4952 \pm 0.0023$ GeV
$\Gamma(\ell^+ \ell^-) = 83.984 \pm 0.086$ MeV [b]
$\Gamma(\text{invisible}) = 499.0 \pm 1.5$ MeV [e]
$\Gamma(\text{hadrons}) = 1744.4 \pm 2.0$ MeV
$\Gamma(\mu^+ \mu^-)/\Gamma(e^+ e^-) = 1.0009 \pm 0.0028$
$\Gamma(\tau^+ \tau^-)/\Gamma(e^+ e^-) = 1.0019 \pm 0.0032$ [f]

Average charged multiplicity
$\langle N_{charged} \rangle = 20.76 \pm 0.16$ (S = 2.1)

Couplings to leptons
$g_V^\ell = -0.03783 \pm 0.00041$
$g_A^\ell = -0.50123 \pm 0.00026$
$g^{\nu_\ell} = 0.5008 \pm 0.0008$
$g^{\nu_e} = 0.53 \pm 0.09$
$g^{\nu_\mu} = 0.502 \pm 0.017$

Asymmetry parameters [g]
$A_e = 0.1515 \pm 0.0019$
$A_\mu = 0.142 \pm 0.015$
$A_\tau = 0.143 \pm 0.004$
$A_s = 0.90 \pm 0.09$
$A_c = 0.670 \pm 0.027$
$A_b = 0.923 \pm 0.020$

Charge asymmetry (%) at Z pole
$A_{FB}^{(0\ell)} = 1.71 \pm 0.10$
$A_{FB}^{(0u)} = 4 \pm 7$
$A_{FB}^{(0s)} = 9.8 \pm 1.1$
$A_{FB}^{(0c)} = 7.07 \pm 0.35$
$A_{FB}^{(0b)} = 9.92 \pm 0.16$

QUARKS

The u-, d-, and s-quark masses are estimates of so-called "current-quark masses," in a mass-independent subtraction scheme such as $\overline{\text{MS}}$ at a scale $\mu \approx 2$ GeV. The c- and b-quark masses are the "running" masses in the $\overline{\text{MS}}$ scheme. For the b-quark we also quote the 1S mass. These can be different from the heavy quark masses obtained in potential models.

u $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 1.5$ to 3.3 MeV [a] Charge $= \frac{2}{3}$ e $I_z = +\frac{1}{2}$
$m_u/m_d = 0.35$ to 0.60

d $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 3.5$ to 6.0 MeV [a] Charge $= -\frac{1}{3}$ e $I_z = -\frac{1}{2}$
$m_s/m_d = 17$ to 22
$\overline{m} = (m_u + m_d)/2 = 2.5$ to 5.0 MeV

s $I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 104^{+26}_{-34}$ MeV [a] Charge $= -\frac{1}{3}$ e Strangeness $= -1$
$(m_s - (m_u + m_d)/2)/(m_d - m_u) = 30$ to 50

c $I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 1.27^{+0.07}_{-0.11}$ GeV Charge $= \frac{2}{3}$ e Charm $= +1$

b $I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

Charge $= -\frac{1}{3}$ e Bottom $= -1$

Mass $m = 4.20^{+0.17}_{-0.07}$ GeV ($\overline{\text{MS}}$ mass)

t $I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

Charge $= \frac{2}{3}$ e Top $= +1$

Mass $m = 171.2 \pm 2.1$ GeV [b] (direct observation of top events)

t DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$W q (q = b, s, d)$				–
$W b$				–
$\ell \nu_\ell$ anything	[c,d]	(9.4 ± 2.4) %		–
$\gamma q (q{=}u,c)$	[e]	$< 5.9 \times 10^{-3}$	95%	–
$\Delta T = 1$ weak neutral current ($T1$) modes				
$Z q (q{=}u,c)$	$T1$ [f]	< 13.7 %	95%	–

b' (4th Generation) Quark, Searches for

Mass $m >$ 190 GeV, CL = 95% ($p\overline{p}$, quasi-stable b')
Mass $m >$ 199 GeV, CL = 95% ($p\overline{p}$, neutral-current decays)
Mass $m >$ 128 GeV, CL = 95% ($p\overline{p}$, charged-current decays)
Mass $m >$ 46.0 GeV, CL = 95% ($e^+ e^-$, all decays)

t' (4th Generation) Quark, Searches for

Mass $m >$ 256 GeV, CL = 95% ($p\overline{p}$, $t'\overline{t}'$ prod., $t' \to W q$)

Free Quark Searches

All searches since 1977 have had negative results.

NOTES

[a] The ratios m_u/m_d and m_s/m_d are extracted from pion and kaon masses using chiral symmetry. The estimates of u and d masses are not without controversy and remain under active investigation. Within the literature there are even suggestions that the u quark could be essentially massless. The s-quark mass is estimated from SU(3) splittings in hadron masses.

[b] Based on published top mass measurements using data from Tevatron Run-I and Run-II. Including also the most recent unpublished results from Run-II, the Tevatron Electroweak Working Group reports a top mass of 172.6 ± 0.8 ± 1.1 GeV. See the note "The Top Quark" in the Quark Particle Listings of this *Review*.

[c] ℓ means e or μ decay mode, not the sum over them.

[d] Assumes lepton universality and W-decay acceptance.

[e] This limit is for $\Gamma(t \to \gamma q)/\Gamma(t \to W b)$.

[f] This limit is for $\Gamma(t \to Z q)/\Gamma(t \to W b)$.

LIGHT UNFLAVORED MESONS
$(S = C = B = 0)$

For $I = 1$ (π, b, ρ, a): $u\overline{d}$, $(u\overline{u}-d\overline{d})/\sqrt{2}$, $d\overline{u}$;
for $I = 0$ $(\eta, \eta', h, h', \omega, \phi, f, f')$: $c_1(u\overline{u} + d\overline{d}) + c_2(s\overline{s})$

$\pi^\pm$

$I^G(J^P) = 1^-(0^-)$

Mass $m = 139.57018 \pm 0.00035$ MeV (S = 1.2)
Mean life $\tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8}$ s (S = 1.2)
$c\tau = 7.8045$ m

$\pi^\pm \to \ell^\pm \nu\gamma$ form factors [a]

$F_V = 0.017 \pm 0.008$
$F_A = 0.0115 \pm 0.0005$ (S = 1.2)
$R = 0.059^{+0.009}_{-0.008}$

π^- modes are charge conjugates of the modes below.

For decay limits to particles which are not established, see the appropriate Search sections (Massive Neutrino Peak Search Test, A^0 (axion), and Other Light Boson (X^0) Searches, etc.).

π^+ DECAY MODES			Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$\mu^+\nu_\mu$		[b]	(99.98770 ± 0.00004) %		30
$\mu^+\nu_\mu\gamma$		[c]	$(2.00 \pm 0.25) \times 10^{-4}$		30
$e^+\nu_e$		[b]	$(1.230 \pm 0.004) \times 10^{-4}$		70
$e^+\nu_e\gamma$		[c]	$(1.61 \pm 0.23) \times 10^{-7}$		70
$e^+\nu_e\pi^0$			$(1.036 \pm 0.006) \times 10^{-8}$		4
$e^+\nu_e e^+ e^-$			$(3.2 \pm 0.5) \times 10^{-9}$		70
$e^+\nu_e\nu\overline{\nu}$			$< 5 \times 10^{-6}$	90%	70
Lepton Family number (*LF*) or Lepton number (*L*) violating modes					
$\mu^+\overline{\nu}_e$	*L*	[d]	$< 1.5 \times 10^{-3}$	90%	30
$\mu^+\nu_e$	*LF*	[d]	$< 8.0 \times 10^{-3}$	90%	30
$\mu^- e^+ e^+ \nu$	*LF*		$< 1.6 \times 10^{-6}$	90%	30

π^0

$I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+})$

Mass $m = 134.9766 \pm 0.0006$ MeV (S = 1.1)
$m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = 4.5936 \pm 0.0005$ MeV
Mean life $\tau = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17}$ s (S = 3.0)
$c\tau = 25.1$ nm

For decay limits to particles which are not established, see the appropriate Search sections (A^0 (axion) and Other Light Boson (X^0) Searches, etc.).

π^0 DECAY MODES			Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level	p (MeV/c)
2γ			(98.798 ± 0.032) %	S=1.1	67
$e^+e^-\gamma$			(1.198 ± 0.032) %	S=1.1	67
γpositronium			$(1.82 \pm 0.29) \times 10^{-9}$		67
$e^+e^+e^-e^-$			$(3.14 \pm 0.30) \times 10^{-5}$		67
e^+e^-			$(6.46 \pm 0.33) \times 10^{-8}$		67
4γ			$< 2 \times 10^{-8}$	CL=90%	67
$\nu\overline{\nu}$		[e]	$< 2.7 \times 10^{-7}$	CL=90%	67
$\nu_e\overline{\nu}_e$			$< 1.7 \times 10^{-6}$	CL=90%	67
$\nu_\mu\overline{\nu}_\mu$			$< 1.6 \times 10^{-6}$	CL=90%	67
$\nu_\tau\overline{\nu}_\tau$			$< 2.1 \times 10^{-6}$	CL=90%	67
$\gamma\nu\overline{\nu}$			$< 6 \times 10^{-4}$	CL=90%	67
Charge conjugation (*C*) or Lepton Family number (*LF*) violating modes					
3γ	*C*		$< 3.1 \times 10^{-8}$	CL=90%	67
μ^+e^-	*LF*		$< 3.8 \times 10^{-10}$	CL=90%	26
μ^-e^+	*LF*		$< 3.4 \times 10^{-9}$	CL=90%	26
$\mu^+e^- + \mu^-e^+$	*LF*		$< 1.72 \times 10^{-8}$	CL=90%	26

η

$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$

Mass $m = 547.853 \pm 0.024$ MeV [f]
Full width $\Gamma = 1.30 \pm 0.07$ keV [g]

C-nonconserving decay parameters

$\pi^+\pi^-\pi^0$ Left-right asymmetry $= (0.09 \pm 0.17) \times 10^{-2}$
$\pi^+\pi^-\pi^0$ Sextant asymmetry $= (0.18 \pm 0.16) \times 10^{-2}$
$\pi^+\pi^-\pi^0$ Quadrant asymmetry $= (-0.17 \pm 0.17) \times 10^{-2}$
$\pi^+\pi^-\gamma$ Left-right asymmetry $= (0.9 \pm 0.4) \times 10^{-2}$
$\pi^+\pi^-\gamma$ β (*D*-wave) $= -0.02 \pm 0.07$ (S = 1.3)

Dalitz plot parameter

$\pi^0\pi^0\pi^0$ $\alpha = -0.031 \pm 0.004$

η DECAY MODES			Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level	p (MeV/c)
Neutral modes					
neutral modes			(71.91 ± 0.34) %	S=1.2	–
2γ		[g]	(39.31 ± 0.20) %	S=1.1	274
$3\pi^0$			(32.56 ± 0.23) %	S=1.1	179
$\pi^0 2\gamma$			$(4.4 \pm 1.5) \times 10^{-4}$	S=2.0	257
$\pi^0\pi^0\gamma\gamma$			$< 1.2 \times 10^{-3}$	CL=90%	238
4γ			$< 2.8 \times 10^{-4}$	CL=90%	274
invisible			$< 6 \times 10^{-4}$	CL=90%	–
Charged modes					
charged modes			(28.06 ± 0.34) %	S=1.2	–
$\pi^+\pi^-\pi^0$			(22.73 ± 0.28) %	S=1.2	174
$\pi^+\pi^-\gamma$			(4.60 ± 0.16) %	S=2.1	236
$e^+e^-\gamma$			$(6.8 \pm 0.8) \times 10^{-3}$	S=1.7	274
$\mu^+\mu^-\gamma$			$(3.1 \pm 0.4) \times 10^{-4}$		253
e^+e^-			$< 7.7 \times 10^{-5}$	CL=90%	274
$\mu^+\mu^-$			$(5.8 \pm 0.8) \times 10^{-6}$		253
$e^+e^-e^+e^-$			$< 6.9 \times 10^{-5}$	CL=90%	274
$\pi^+\pi^-e^+e^-$			$(4.2 \pm 1.2) \times 10^{-4}$		235
$\pi^+\pi^-2\gamma$			$< 2.0 \times 10^{-3}$		236
$\pi^+\pi^-\pi^0\gamma$			$< 5 \times 10^{-4}$	CL=90%	174
$\pi^0\mu^+\mu^-\gamma$			$< 3 \times 10^{-6}$	CL=90%	210
Charge conjugation (*C*), Parity (*P*), Charge conjugation × Parity (*CP*), or Lepton Family number (*LF*) violating modes					
$\pi^0\gamma$	*C*		$< 9 \times 10^{-5}$	CL=90%	257
$\pi^+\pi^-$	*P,CP*		$< 1.3 \times 10^{-5}$	CL=90%	236
$\pi^0\pi^0$	*P,CP*		$< 3.5 \times 10^{-4}$	CL=90%	238
$\pi^0\pi^0\gamma$	*C*		$< 5 \times 10^{-4}$	CL=90%	238
$\pi^0\pi^0\pi^0\gamma$	*C*		$< 6 \times 10^{-5}$	CL=90%	179
3γ	*C*		$< 1.6 \times 10^{-5}$	CL=90%	274
$4\pi^0$	*P,CP*		$< 6.9 \times 10^{-7}$	CL=90%	40
$\pi^0e^+e^-$	*C*	[h]	$< 4 \times 10^{-5}$	CL=90%	257
$\pi^0\mu^+\mu^-$	*C*	[h]	$< 5 \times 10^{-6}$	CL=90%	210
$\mu^+e^- + \mu^-e^+$	*LF*		$< 6 \times 10^{-6}$	CL=90%	264

$f_0(600)$ [i] or σ

$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++})$

Mass $m = (400\text{–}1200)$ MeV
Full width $\Gamma = (600\text{–}1000)$ MeV

$f_0(600)$ DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	p (MeV/c)
$\pi\pi$	dominant	–
$\gamma\gamma$	seen	–

N BARYONS
$(S = 0, I = 1/2)$

p, $N^+ = uud$; n, $N^0 = udd$

p

$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 1.00727646688 \pm 0.00000000013$ u
Mass $m = 938.27203 \pm 0.00008$ MeV [a]
$|m_p - m_{\overline{p}}|/m_p < 2 \times 10^{-9}$, CL = 90% [b]
$|\frac{q_{\overline{p}}}{m_{\overline{p}}}|/(\frac{q_p}{m_p}) = 0.99999999991 \pm 0.00000000009$
$|q_p + q_{\overline{p}}|/e < 2 \times 10^{-9}$, CL = 90% [b]
$|q_p + q_e|/e < 1.0 \times 10^{-21}$ [c]
Magnetic moment $\mu = 2.792847351 \pm 0.000000028\ \mu_N$
$(\mu_p + \mu_{\overline{p}}) / \mu_p = (-2.6 \pm 2.9) \times 10^{-3}$
Electric dipole moment $d < 0.54 \times 10^{-23}$ $e$cm
Electric polarizability $\alpha = (12.0 \pm 0.6) \times 10^{-4}$ fm^3
Magnetic polarizability $\beta = (1.9 \pm 0.5) \times 10^{-4}$ fm^3
Charge radius $= 0.875 \pm 0.007$ fm
Mean life $\tau > 2.1 \times 10^{29}$ years, CL = 90% ($p \to$ invisible mode)
Mean life $\tau > 10^{31}$ to 10^{33} years [d] (mode dependent)

See the "Note on Nucleon Decay" in our 1994 edition (Phys. Rev. **D50**, 1173) for a short review.

The "partial mean life" limits tabulated here are the limits on τ/B_i, where τ is the total mean life and B_i is the branching fraction for the mode in question. For *N* decays, *p* and *n* indicate proton and neutron partial lifetimes.

p DECAY MODES	Partial mean life (10^{30} years)	Confidence level	p (MeV/c)
Antilepton + meson			
$N \to e^+\pi$	> 158 (*n*), > 1600 (*p*)	90%	459
$N \to \mu^+\pi$	> 100 (*n*), > 473 (*p*)	90%	453
$N \to \nu\pi$	> 112 (*n*), > 25 (*p*)	90%	459
$p \to e^+\eta$	> 313	90%	309
$p \to \mu^+\eta$	> 126	90%	297
$n \to \nu\eta$	> 158	90%	310
$N \to e^+\rho$	> 217 (*n*), > 75 (*p*)	90%	149
$N \to \mu^+\rho$	> 228 (*n*), > 110 (*p*)	90%	113
$N \to \nu\rho$	> 19 (*n*), > 162 (*p*)	90%	149
$p \to e^+\omega$	> 107	90%	143
$p \to \mu^+\omega$	> 117	90%	105
$n \to \nu\omega$	> 108	90%	144
$N \to e^+K$	> 17 (*n*), > 150 (*p*)	90%	339
$p \to e^+K^0_S$	> 120	90%	337
$p \to e^+K^0_L$	> 51	90%	337
$N \to \mu^+K$	> 26 (*n*), > 120 (*p*)	90%	329
$p \to \mu^+K^0_S$	> 150	90%	326
$p \to \mu^+K^0_L$	> 83	90%	326
$N \to \nu K$	> 86 (*n*), > 670 (*p*)	90%	339
$n \to \nu K^0_S$	> 51	90%	338
$p \to e^+K^*(892)^0$	> 84	90%	45
$N \to \nu K^*(892)$	> 78 (*n*), > 51 (*p*)	90%	45
Antilepton + mesons			
$p \to e^+\pi^+\pi^-$	> 82	90%	448
$p \to e^+\pi^0\pi^0$	> 147	90%	449
$n \to e^+\pi^-\pi^0$	> 52	90%	449
$p \to \mu^+\pi^+\pi^-$	> 133	90%	425
$p \to \mu^+\pi^0\pi^0$	> 101	90%	427
$n \to \mu^+\pi^-\pi^0$	> 74	90%	427
$n \to e^+K^0\pi^-$	> 18	90%	319
Lepton + meson			
$n \to e^-\pi^+$	> 65	90%	459
$n \to \mu^-\pi^+$	> 49	90%	453
$n \to e^-\rho^+$	> 62	90%	150
$n \to \mu^-\rho^+$	> 7	90%	114
$n \to e^-K^+$	> 32	90%	340
$n \to \mu^-K^+$	> 57	90%	330
Lepton + mesons			
$p \to e^-\pi^+\pi^+$	> 30	90%	448
$n \to e^-\pi^+\pi^0$	> 29	90%	449
$p \to \mu^-\pi^+\pi^+$	> 17	90%	425
$n \to \mu^-\pi^+\pi^0$	> 34	90%	427
$p \to e^-\pi^+K^+$	> 75	90%	320
$p \to \mu^-\pi^+K^+$	> 245	90%	279
Antilepton + photon(s)			
$p \to e^+\gamma$	> 670	90%	469
$p \to \mu^+\gamma$	> 478	90%	463
$n \to \nu\gamma$	> 28	90%	470
$p \to e^+\gamma\gamma$	> 100	90%	469
$n \to \nu\gamma\gamma$	> 219	90%	470
Three (or more) leptons			
$p \to e^+e^+e^-$	> 793	90%	469
$p \to e^+\mu^+\mu^-$	> 359	90%	457
$p \to e^+\nu\nu$	> 17	90%	469
$n \to e^+e^-\nu$	> 257	90%	470
$n \to \mu^+e^-\nu$	> 83	90%	464
$n \to \mu^+\mu^-\nu$	> 79	90%	458
$p \to \mu^+e^+e^-$	> 529	90%	463
$p \to \mu^+\mu^+\mu^-$	> 675	90%	439
$p \to \mu^+\nu\nu$	> 21	90%	463
$p \to e^-\mu^+\mu^+$	> 6	90%	457
$n \to 3\nu$	> 0.0005	90%	470
Inclusive modes			
$N \to e^+$anything	> 0.6 (*n*, *p*)	90%	–
$N \to \mu^+$anything	> 12 (*n*, *p*)	90%	–
$N \to e^+\pi^0$anything	> 0.6 (*n*, *p*)	90%	–
$\Delta B = 2$ dinucleon modes			
The following are lifetime limits per iron nucleus.			
$pp \to \pi^+\pi^+$	> 0.7	90%	–
$pn \to \pi^+\pi^0$	> 2	90%	–
$nn \to \pi^+\pi^-$	> 0.7	90%	–
$nn \to \pi^0\pi^0$	> 3.4	90%	–
$pp \to e^+e^+$	> 5.8	90%	–
$pp \to e^+\mu^+$	> 3.6	90%	–
$pp \to \mu^+\mu^+$	> 1.7	90%	–
$pn \to e^+\overline{\nu}$	> 2.8	90%	–
$pn \to \mu^+\overline{\nu}$	> 1.6	90%	–
$nn \to \nu_e\overline{\nu}_e$	> 0.000049	90%	–
$pn \to$ invisible	$> 2.1 \times 10^{-5}$	90%	–
$pp \to$ invisible	> 0.00005	90%	–

$\overline{p}$ DECAY MODES

$\overline{p}$ DECAY MODES	Partial mean life (years)	Confidence level	p (MeV/c)
$\overline{p} \to e^-\gamma$	$> 7 \times 10^5$	90%	469
$\overline{p} \to \mu^-\gamma$	$> 5 \times 10^4$	90%	463
$\overline{p} \to e^-\pi^0$	$> 4 \times 10^5$	90%	459
$\overline{p} \to \mu^-\pi^0$	$> 5 \times 10^4$	90%	453
$\overline{p} \to e^-\eta$	$> 2 \times 10^4$	90%	309
$\overline{p} \to \mu^-\eta$	$> 8 \times 10^3$	90%	297
$\overline{p} \to e^-K^0_S$	> 900	90%	337
$\overline{p} \to \mu^-K^0_S$	$> 4 \times 10^3$	90%	326
$\overline{p} \to e^-K^0_L$	$> 9 \times 10^3$	90%	337
$\overline{p} \to \mu^-K^0_L$	$> 7 \times 10^3$	90%	326
$\overline{p} \to e^-\gamma\gamma$	$> 2 \times 10^4$	90%	469
$\overline{p} \to \mu^-\gamma\gamma$	$> 2 \times 10^4$	90%	463
$\overline{p} \to e^-\omega$	> 200	90%	143

LEPTONS

e

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = (548.57990943 \pm 0.00000023) \times 10^{-6}$ u
Mass $m = 0.510998910 \pm 0.000000013$ MeV
$|m_{e^+} - m_{e^-}|/m < 8 \times 10^{-9}$, CL = 90%
$|q_{e^+} + q_{e^-}|/e < 4 \times 10^{-8}$
Magnetic moment anomaly
$(g{-}2)/2 = (1159.6521811 \pm 0.0000007) \times 10^{-6}$
$(g_{e^+} - g_{e^-}) \,/\, g_{\rm average} = (-0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}$
Electric dipole moment $d = (0.07 \pm 0.07) \times 10^{-26}$ $e$cm
Mean life $\tau > 4.6 \times 10^{26}$ yr, CL = 90% [a]

μ

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = 0.1134289256 \pm 0.0000000029$ u
Mass $m = 105.658367 \pm 0.000004$ MeV
Mean life $\tau = (2.197019 \pm 0.000021) \times 10^{-6}$ s (S = 1.1)
$\tau_{\mu^+}/\tau_{\mu^-} = 1.00002 \pm 0.00008$
$c\tau = 658.650$ m
Magnetic moment anomaly $(g{-}2)/2 = (11659208 \pm 6) \times 10^{-10}$
$(g_{\mu^+} - g_{\mu^-}) \,/\, g_{\rm average} = (-0.11 \pm 0.12) \times 10^{-8}$
Electric dipole moment $d = (3.7 \pm 3.4) \times 10^{-19}$ $e$cm

Decay parameters [b]

$\rho = 0.7509 \pm 0.0010$
$\eta = 0.001 \pm 0.024$ (S = 2.0)
$\delta = 0.7495 \pm 0.0012$
$\xi P_\mu = 1.0007 \pm 0.0035$ [c]
$\xi P_\mu \delta/\rho > 0.99682$, CL = 90% [c]
$\xi' = 1.00 \pm 0.04$
$\xi'' = 0.7 \pm 0.4$
$\alpha/A = (0 \pm 4) \times 10^{-3}$
$\alpha'/A = (0 \pm 4) \times 10^{-3}$
$\beta/A = (4 \pm 6) \times 10^{-3}$
$\beta'/A = (1 \pm 5) \times 10^{-3}$
$\overline{\eta} = 0.02 \pm 0.08$

μ^+ modes are charge conjugates of the modes below.

μ^- DECAY MODES			Fraction (Γ_i/Γ)		Confidence level	p (MeV/c)
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu$			$\approx 100\%$			53
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu \gamma$		[d]	(1.4 ± 0.4) %			53
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu e^+ e^-$		[e]	$(3.4 \pm 0.4) \times 10^{-5}$			53
Lepton Family number (*LF*) violating modes						
$e^- \nu_e \overline{\nu}_\mu$	*LF*	[f]	< 1.2	%	90%	53
$e^- \gamma$	*LF*		< 1.2	$\times 10^{-11}$	90%	53
$e^- e^+ e^-$	*LF*		< 1.0	$\times 10^{-12}$	90%	53
$e^- 2\gamma$	*LF*		< 7.2	$\times 10^{-11}$	90%	53

τ

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = 1776.84 \pm 0.17$ MeV
$(m_{\tau^+} - m_{\tau^-})/m_{\rm average} < 2.8 \times 10^{-4}$, CL = 90%
Mean life $\tau = (290.6 \pm 1.0) \times 10^{-15}$ s
$c\tau = 87.11$ μm
Magnetic moment anomaly > -0.052 and < 0.013, CL = 95%
$\mathrm{Re}(d_\tau) = -0.22$ to 0.45×10^{-16} $e$cm, CL = 95%
$\mathrm{Im}(d_\tau) = -0.25$ to 0.008×10^{-16} $e$cm, CL = 95%

Weak dipole moment

$\mathrm{Re}(d^w_\tau) < 0.50 \times 10^{-17}$ $e$cm, CL = 95%
$\mathrm{Im}(d^w_\tau) < 1.1 \times 10^{-17}$ $e$cm, CL = 95%

Weak anomalous magnetic dipole moment

$\mathrm{Re}(\alpha^w_\tau) < 1.1 \times 10^{-3}$, CL = 95%
$\mathrm{Im}(\alpha^w_\tau) < 2.7 \times 10^{-3}$, CL = 95%

Decay parameters

See the τ Particle Listings for a note concerning τ-decay parameters.

$\rho(e \text{ or } \mu) = 0.745 \pm 0.008$
$\rho(e) = 0.747 \pm 0.010$
$\rho(\mu) = 0.763 \pm 0.020$
$\xi(e \text{ or } \mu) = 0.985 \pm 0.030$
$\xi(e) = 0.994 \pm 0.040$
$\xi(\mu) = 1.030 \pm 0.059$
$\eta(e \text{ or } \mu) = 0.013 \pm 0.020$
$\eta(\mu) = 0.094 \pm 0.073$
$(\delta\xi)(e \text{ or } \mu) = 0.746 \pm 0.021$
$(\delta\xi)(e) = 0.734 \pm 0.028$
$(\delta\xi)(\mu) = 0.778 \pm 0.037$
$\xi(\pi) = 0.993 \pm 0.022$
$\xi(\rho) = 0.994 \pm 0.008$
$\xi(a_1) = 1.001 \pm 0.027$
$\xi(\text{all hadronic modes}) = 0.995 \pm 0.007$

τ^+ modes are charge conjugates of the modes below. "$h^\pm$" stands for $\pi^\pm$ or $K^\pm$. "ℓ" stands for e or μ. "Neutrals" stands for γ's and/or π^0's.

τ^- DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level	p (MeV/c)
Modes with one charged particle				
particle$^- \geq 0$ neutrals $\geq 0 K^0 \nu_\tau$ ("1-prong")		(85.36 ± 0.08) %	S=1.3	–
particle$^- \geq 0$ neutrals $\geq 0 K^0_L \nu_\tau$		(84.73 ± 0.08) %	S=1.4	–
$\mu^- \overline{\nu}_\mu \nu_\tau$	[g]	(17.36 ± 0.05) %		885
$\mu^- \overline{\nu}_\mu \nu_\tau \gamma$	[e]	$(3.6 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		885
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\tau$	[g]	(17.85 ± 0.05) %		888
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\tau \gamma$	[e]	(1.75 ± 0.18) %		888
$h^- \geq 0 K^0_L \nu_\tau$		(12.13 ± 0.07) %	S=1.1	883
$h^- \nu_\tau$		(11.60 ± 0.06) %	S=1.1	883
$\pi^- \nu_\tau$	[g]	(10.91 ± 0.07) %	S=1.1	883
$K^- \nu_\tau$	[g]	$(6.95 \pm 0.23) \times 10^{-3}$	S=1.1	820
$h^- \geq 1$ neutrals ν_τ		(37.08 ± 0.11) %	S=1.2	–
$h^- \geq 1\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0)$		(36.54 ± 0.11) %	S=1.2	–
$h^- \pi^0 \nu_\tau$		(25.95 ± 0.10) %	S=1.1	878
$\pi^- \pi^0 \nu_\tau$	[g]	(25.52 ± 0.10) %	S=1.1	878
$\pi^- \pi^0$ non-$\rho(770) \nu_\tau$		$(3.0 \pm 3.2) \times 10^{-3}$		878
$K^- \pi^0 \nu_\tau$	[g]	$(4.28 \pm 0.15) \times 10^{-3}$		814
$h^- \geq 2\pi^0 \nu_\tau$		(10.84 ± 0.12) %	S=1.3	–
$h^- 2\pi^0 \nu_\tau$		(9.49 ± 0.11) %	S=1.2	862
$h^- 2\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0)$		(9.33 ± 0.12) %	S=1.2	862
$\pi^- 2\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0)$	[g]	(9.27 ± 0.12) %	S=1.2	862
$\pi^- 2\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0)$, scalar		$< 9 \times 10^{-3}$	CL=95%	862
$\pi^- 2\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0)$, vector		$< 7 \times 10^{-3}$	CL=95%	862
$K^- 2\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0)$	[g]	$(6.3 \pm 2.3) \times 10^{-4}$		796
$h^- \geq 3\pi^0 \nu_\tau$		(1.35 ± 0.07) %	S=1.1	–
$h^- \geq 3\pi^0 \nu_\tau (\text{ex. } K^0)$		(1.26 ± 0.07) %	S=1.1	–
$h^- 3\pi^0 \nu_\tau$		(1.18 ± 0.08) %		836
$\pi^- 3\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0)$	[g]	(1.04 ± 0.07) %		836
$K^- 3\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0, \eta)$	[g]	$(4.7 \pm 2.1) \times 10^{-4}$		765
$h^- 4\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0)$		$(1.6 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		800
$h^- 4\pi^0 \nu_\tau (\text{ex.} K^0, \eta)$	[g]	$(1.0 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		800
$K^- \geq 0\pi^0 \geq 0K^0 \geq 0\gamma\ \nu_\tau$		(1.57 ± 0.04) %	S=1.1	820
$K^- \geq 1\ (\pi^0 \text{ or } K^0 \text{ or } \gamma)\ \nu_\tau$		$(8.74 \pm 0.32) \times 10^{-3}$		–
Modes with K^0's				
$K^0_S (\text{particles})^- \nu_\tau$		$(9.2 \pm 0.4) \times 10^{-3}$	S=1.4	–
$h^- \overline{K}^0 \nu_\tau$		$(10.0 \pm 0.5) \times 10^{-3}$	S=1.8	812
$\pi^- \overline{K}^0 \nu_\tau$	[g]	$(8.4 \pm 0.4) \times 10^{-3}$	S=2.0	812
$\pi^- \overline{K}^0$ (non-$K^*(892)^-$)ν_τ		$(5.4 \pm 2.1) \times 10^{-4}$		812
$K^- K^0 \nu_\tau$	[g]	$(1.58 \pm 0.16) \times 10^{-3}$		737
$K^- K^0 \geq 0\pi^0 \nu_\tau$		$(3.16 \pm 0.23) \times 10^{-3}$		737
$h^- \overline{K}^0 \pi^0 \nu_\tau$		$(5.5 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		794
$\pi^- \overline{K}^0 \pi^0 \nu_\tau$	[g]	$(3.9 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		794
$\overline{K}^0 \rho^- \nu_\tau$		$(2.2 \pm 0.5) \times 10^{-3}$		612
$K^- K^0 \pi^0 \nu_\tau$	[g]	$(1.58 \pm 0.20) \times 10^{-3}$		685

---

1. PHYSICAL CONSTANTS

Table 1.1. Reviewed 2007 by P.J. Mohr and B.N. Taylor (NIST). Based mainly on the "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2006" by P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell (to be published in Rev. Mod. Phys, and J. Phys. Chem. Ref. Data). The last group of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. The figures in parentheses after the values give the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the corresponding fractional uncertainties in parts per 10^9 (ppb) are given in the last column. This set of constants (aside from the last group) is recommended for international use by CODATA (the Committee on Data for Science and Technology). The full 2006 CODATA set of constants may be found at `http://physics.nist.gov/constants`.

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	$299\ 792\ 458$ m s^{-1}	exact*
Planck constant	h	$6.626\ 068\ 96(33) \times 10^{-34}$ J s	50
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	$1.054\ 571\ 628(53) \times 10^{-34}$ J s	50
		$= 6.582\ 118\ 99(16) \times 10^{-22}$ MeV s	25
electron charge magnitude	e	$1.602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}$ C $= 4.803\ 204\ 27(12) \times 10^{-10}$ esu	25, 25
conversion constant	$\hbar c$	$197.326\ 9631(49)$ MeV fm	25
conversion constant	$(\hbar c)^2$	$0.389\ 379\ 304(19)$ GeV^2 mbarn	50
electron mass	m_e	$0.510\ 998\ 910(13)$ MeV/c^2 $= 9.109\ 382\ 15(45) \times 10^{-31}$ kg	25, 50
proton mass	m_p	$938.272\ 013(23)$ MeV/c^2 $= 1.672\ 621\ 637(83) \times 10^{-27}$ kg	25, 50
		$= 1.007\ 276\ 466\ 77(10)$ u $= 1836.152\ 672\ 47(80)\ m_e$	0.10, 0.43
deuteron mass	m_d	$1875.612\ 793(47)$ MeV/c^2	25
unified atomic mass unit (u)	(mass ^{12}C atom)/12 = (1 g)/(N_A mol)	$931.494\ 028(23)$ MeV/c^2 $= 1.660\ 538\ 782(83) \times 10^{-27}$ kg	25, 50
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\ 187\ 817 \ldots \times 10^{-12}$ F m^{-1}	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2} $= 12.566\ 370\ 614 \ldots \times 10^{-7}$ N A^{-2}	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$	$7.297\ 352\ 5376(50) \times 10^{-3} = 1/137.035\ 999\ 679(94)^\dagger$	0.68, 0.68
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	$2.817\ 940\ 2894(58) \times 10^{-15}$ m	2.1
(e^- Compton wavelength)/2π	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e \alpha^{-1}$	$3.861\ 592\ 6459(53) \times 10^{-13}$ m	1.4
Bohr radius ($m_{\rm nucleus} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/m_e e^2 = r_e \alpha^{-2}$	$0.529\ 177\ 208\ 59(36) \times 10^{-10}$ m	0.68
wavelength of 1 eV/c particle	$hc/(1\text{ eV})$	$1.239\ 841\ 875(31) \times 10^{-6}$ m	25
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2 \alpha^2/2$	$13.605\ 691\ 93(34)$ eV	25
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	$0.665\ 245\ 8558(27)$ barn	4.1
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5.788\ 381\ 7555(79) \times 10^{-11}$ MeV T^{-1}	1.4
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\ 451\ 2326(45) \times 10^{-14}$ MeV T^{-1}	1.4
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\rm cycl}/B = e/m_e$	$1.758\ 820\ 150(44) \times 10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	25
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\rm cycl}/B = e/m_p$	$9.578\ 833\ 92(24) \times 10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	25
gravitational constant‡	G_N	$6.674\ 28(67) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.0×10^5
		$= 6.708\ 81(67) \times 10^{-39}\ \hbar c\ (\text{GeV}/c^2)^{-2}$	1.0×10^5
standard gravitational accel.	g_N	$9.806\ 65$ m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	$6.022\ 141\ 79(30) \times 10^{23}$ mol^{-1}	50
Boltzmann constant	k	$1.380\ 6504(24) \times 10^{-23}$ J K^{-1}	1700
		$= 8.617\ 343(15) \times 10^{-5}$ eV K^{-1}	1700
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k(273.15\text{ K})/(101\ 325\text{ Pa})$	$22.413\ 996(39) \times 10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\rm max} T$	$2.897\ 7685(51) \times 10^{-3}$ m K	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	$5.670\ 400(40) \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	7000
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\ 37(1) \times 10^{-5}$ GeV^{-2}	9000
weak-mixing angle	$\sin^2 \widehat{\theta}(M_Z)$ ($\overline{\rm MS}$)	$0.231\ 19(14)^{\dagger\dagger}$	6.5×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	$80.398(25)$ GeV/c^2	3.6×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	$91.1876(21)$ GeV/c^2	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	$0.1176(20)$	1.7×10^7

$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238$ $e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235$ $\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 861$

1 in $\equiv$ 0.0254 m	1 G $\equiv 10^{-4}$ T	1 eV $= 1.602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}$ J	kT at 300 K $= [38.681\ 685(68)]^{-1}$ eV
1 Å $\equiv$ 0.1 nm	1 dyne $\equiv 10^{-5}$ N	1 eV/c^2 $= 1.782\ 661\ 758(44) \times 10^{-36}$ kg	0 °C $\equiv$ 273.15 K
1 barn $\equiv 10^{-28}$ m^2	1 erg $\equiv 10^{-7}$ J	$2.997\ 924\ 58 \times 10^9$ esu = 1 C	1 atmosphere $\equiv$ 760 Torr $\equiv$ 101 325 Pa

---

* The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.

† At $Q^2 = 0$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is $\sim 1/128$.

‡ Absolute lab measurements of G_N have been made only on scales of about 1 cm to 1 m.

** See the discussion in Sec. 10, "Electroweak model and constraints on new physics."

†† The corresponding $\sin^2 \theta$ for the effective angle is 0.23149(13).

2. ASTROPHYSICAL CONSTANTS AND PARAMETERS

Table 2.1. Revised May 2008 by E. Bergren and D.E. Groom (LBNL). The figures in parentheses after some values give the one standard deviation uncertainties in the last digit(s). Physical constants are from Ref. 1. While every effort has been made to obtain the most accurate current values of the listed quantities, the table does not represent a critical review or adjustment of the constants, and is not intended as a primary reference. The values and uncertainties for the cosmological parameters depend on the exact data sets, priors, and basis parameters used in the fit. Many of the parameters reported in this table are derived parameters or have non-Gaussian likelihoods. The quoted errors may be highly correlated with those of other parameters, so care must be taken in propagating them. Unless otherwise specified, cosmological parameters are best fits of a spatially-flat ΛCDM cosmology with a power-law initial spectrum to WMAP 3-year data alone [2]. For more information see Ref. 3 and the original papers.

Quantity	Symbol, equation	Value	Reference, footnote
speed of light	c	$299\,792\,458$ m s^{-1}	exact[4]
Newtonian gravitational constant	G_N	$6.674\,3(7) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	[1]
Planck mass	$\sqrt{\hbar c/G_N}$	$1.220\,89(6) \times 10^{19}$ GeV$/c^2$ $= 2.176\,44(11) \times 10^{-8}$ kg	[1]
Planck length	$\sqrt{\hbar G_N/c^3}$	$1.616\,24(8) \times 10^{-35}$ m	[1]
standard gravitational acceleration	g_N	$9.806\,65$ m s^{-2}	exact[1]
jansky (flux density)	Jy	10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}	definition
tropical year (equinox to equinox) (2007)	yr	$31\,556\,925.2$ s $\approx \pi \times 10^7$ s	[5]
sidereal year (fixed star to fixed star) (2007)		$31\,558\,149.8$ s $\approx \pi \times 10^7$ s	[5]
mean sidereal day (2007) (time between vernal equinox transits)		$23^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}\,04\overset{\mathrm{s}}{.}090\,53$	[5]
astronomical unit	AU, A	$149\,597\,870\,700(3)$ m	[6]
parsec (1 AU/1 arc sec)	pc	$3.085\,677\,6 \times 10^{16}$ m $= 3.262\ldots$ ly	[7]
light year (deprecated unit)	ly	$0.306\,6\ldots$ pc $= 0.946\,053\ldots \times 10^{16}$ m	
Schwarzschild radius of the Sun	$2G_N M_\odot/c^2$	$2.953\,250\,077\,0(2)$ km	[8]
Solar mass	$M_\odot$	$1.988\,4(2) \times 10^{30}$ kg	[9]
Solar equatorial radius	$R_\odot$	$6.9551(3) \times 10^8$ m	[10]
Solar luminosity	$L_\odot$	$3.842\,7(1\,4) \times 10^{26}$ W	[11]
Schwarzschild radius of the Earth	$2G_N M_\oplus/c^2$	$8.870\,055\,881$ mm	[12]
Earth mass	$M_\oplus$	$5.972\,2(6) \times 10^{24}$ kg	[13]
Earth mean equatorial radius	$R_\oplus$	$6.378\,137 \times 10^6$ m	[5]
luminosity conversion (deprecated)	L	$3.02 \times 10^{28} \times 10^{-0.4\,M_{\mathrm{bol}}}$ W (M_{bol} = absolute bolometric magnitude = bolometric magnitude at 10 pc)	[14]
flux conversion (deprecated)	$\mathscr{F}$	$2.52 \times 10^{-8} \times 10^{-0.4\,m_{\mathrm{bol}}}$ W m^{-2} (m_{bol} = apparent bolometric magnitude)	from above
ABsolute monochromatic magnitude	AB	$-2.5 \log_{10} f_\nu - 56.10$ (for f_ν in W m^{-2} Hz^{-1}) $= -2.5 \log_{10} f_\nu + 8.90$ (for f_ν in Jy)	[15]
Solar velocity around center of Galaxy	Θ_0	$220(20)$ km s^{-1}	[16]
Solar distance from Galactic center	R_0	$8.0(5)$ kpc	[17]
local disk density	$\rho_{\,\mathrm{disk}}$	3–12 $\times 10^{-24}$ g cm^{-3} $\approx$ 2–7 GeV$/c^2$ cm^{-3}	[18]
local halo density	$\rho_{\,\mathrm{halo}}$	2–13 $\times 10^{-25}$ g cm^{-3} $\approx$ 0.1–0.7 GeV$/c^2$cm^{-3}	[19]
present day CMB temperature	T_0	$2.725(1)$ K	[20]
present day CMB dipole amplitude		$3.358(17)$ mK	[21]
Solar velocity with respect to CMB		$369(2)$ km/s towards $(\ell, b) = (263.86(4)°, 48.24(10)°)$	[21]
Local Group velocity with respect to CMB	v_{LG}	$627(22)$ km s^{-1} towards $(\ell, b) = (276(3)°, 30(3)°$	[22]
entropy density/Boltzmann constant	s/k	$2\,889.2\ (T/2.725)^3$ cm^{-3}	[14]
number density of CMB photons	n_γ	$410.5(T/2.725)^3$ cm^{-3}	[23]
present day Hubble expansion rate	H_0	$100\ h$ km s^{-1} Mpc^{-1} $= h \times (9.777\,752$ Gyr$)^{-1}$	[24]
present day normalized Hubble expansion rate‡	h	$0.73(3)$	[2,3]
Hubble length	c/H_0	$0.925\,063 \times 10^{26}\,h^{-1}$ m $\approx 1.27 \times 10^{26}$ m	
scale factor for cosmological constant	$c^2/3H_0^2$	$2.852 \times 10^{51}\,h^{-2}$ m^2	
critical density of the Universe	$\rho_{\mathrm{c}} = 3H_0^2/8\pi G_N$	$2.775\,366\,27 \times 10^{11}\,h^2\ M_\odot$Mpc^{-3} $= 1.878\,35(19) \times 10^{-29}\,h^2$ g cm^{-3} $= 1.053\,68(11) \times 10^{-5}\,h^2$ (GeV$/c^2$) cm^{-3}	
pressureless matter density of the Universe‡	$\Omega_{\mathrm{m}} = \rho_{\mathrm{m}}/\rho_{\mathrm{c}}$	$0.128(8)\,h^{-2} \approx 0.24$ (WMAP3) $0.132(4)\,h^{-2} \Rightarrow 0.27(2)$ (ALL mean)	[2,3] [2]
baryon density of the Universe‡	$\Omega_{\mathrm{b}} = \rho_{\mathrm{b}}/\rho_{\mathrm{c}}$	$0.0223(7)\,h^{-2} \approx 0.0425$	[2,3]
dark matter density of the universe‡	$\Omega_{\mathrm{dm}} = \Omega_{\mathrm{m}} - \Omega_{\mathrm{b}}$	$0.105(8)\,h^{-2} \approx 0.20$	[2]
dark energy density of the Universe‡	Ω_Λ	$0.73(3)$	[25]
Hubble length	c/H_0	$0.925\,063 \times 10^{26}\,h^{-1}$ m $\approx 1.27 \times 10^{26}$ m	
radiation density of the Universe‡	$\Omega_\gamma = \rho_\gamma/\rho_{\mathrm{c}}$	$2.471 \times 10^{-5}(T/2.725)^4\,h^{-2} \approx 4.6 \times 10^{-5}$	[23]
neutrino density of the Universe‡	Ω_ν	$0.0005 < \Omega_\nu h^{-2} < 0.023 \Rightarrow 0.001 < \Omega_\nu < 0.05$	[26]
total energy density of the Universe‡	$\Omega_{\mathrm{tot}} = \Omega_{\mathrm{m}} + \ldots + \Omega_\Lambda$	$1.011(12)$	[2,27]

1.4 Reminder: Spez. Rel.

Elementarteilchen sind meist sehr leicht und bewegen sich schnell

→ relativistische Beschreibung! ∃ Inertialsysteme ...

→ wichtig! [∈ Theorie I] [hier: Wdh.]

alle (verallg.) Koord. werden als 4-Vektoren zusammengefasst:

Ortsvektor x^μ, $\mu = 0, .., 3$, $x^0 := t$, $x^1 := x$, $x^2 := y$, $x^3 := z$

$$\Rightarrow x^\mu = (t, \vec{x})$$

Viererimpuls p^μ, $p^0 := E$, $p^1 := p_x$, $p^2 := p_y$, $p^3 := p_z$

$$\Rightarrow p^\mu = (E, \vec{p})$$

$\hat{=} \frac{\partial}{\partial\tau}$

Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \partial_\tau x^\mu(\tau)$

Eigenzeit des Teilchens

„Weltlinie" des Teilchens

$$u^\mu = \gamma(1, \vec{v}) \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dt}{d\tau} \quad \text{im Laborsystem}$$

massive Teilchen: $p^\mu = m u^\mu$ (Def. der Masse)

Relevanz: $(p^\mu)_{\text{vorher}} = (p^\mu)_{\text{nachher}}$ Viererimpuls-Erhaltung

Ableitungen $\partial_\mu := \partial_{x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu := \partial_{x_\mu}$

mit Hilfe des metrischen Tensors

((in Lit auch benutzt: diag(-1,1,1,1)))

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

bildet man die Skalarprodukte von 4-Vektoren:

$$a \cdot b := a_\mu b^\mu := g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu := a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Einstein'sche Summenkonvention! ${}_{\alpha}{}^{\alpha} \hat{=} \sum_{\alpha=0}^{3}$

z.B. $a^2 = a \cdot a = (a^0)^2 - \vec{a}^2$ ((kann auch < 0 sein!

$a^2 < 0$ heißt „raumartig"
> 0 zeit
$= 0$ licht))

z.B. $u^2 = \gamma^2(1^2 - \vec{v}^2) = 1$

$p^2 = m^2$

$\Box := \partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$

Relevanz: Skalarprodukte sind invariant

d.h. sie haben in allen Inertialsystemen den gleichen Wert

lineare Transformationen $\Lambda^\mu{}_\nu$, unter denen die Skalarprodukte invariant bleiben, bilden die Lorentzgruppe

Lorentz trafo: $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$

Invarianz: $a' \cdot b' = g_{\mu\nu} a'^\mu b'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho a^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma b^\sigma$

$\overset{!}{=} g_{\rho\sigma} a^\rho b^\sigma = a \cdot b$

$\Rightarrow g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

bzw $\Lambda^T g \Lambda = g$

$(\mathrm{Det}\,\Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$

und (00-Komp.) $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$

$\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

haben also vier "Klassen" von Lorentztransformationen (LT)

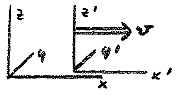
"eigentliche" LT $:= \{\mathrm{Det}\,\Lambda = +1 \;,\; \Lambda^0{}_0 \geq 1\} =: \Lambda_E$

((die anderen drei: $\Lambda_P \cdot \Lambda_E$, $\Lambda_T \cdot \Lambda_E$, $\Lambda_P \cdot \Lambda_T \cdot \Lambda_E$

mit Zeitumkehr $\Lambda_T := \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \quad : x^0 \to -x^0,\ \vec{x} \to \vec{x}$

und Raumspiegelung $\Lambda_P := \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \quad : x^0 \to x^0,\ \vec{x} \to -\vec{x}$))

konkret: boost z.B. in x-Richtung



Uhren synchron $t = t' = 0$ bei $x = x' = 0$

Ereignis (t,x,y,z) in gestrichenen Koord.?

$t' = \gamma(t - vx) \quad , x' = \gamma(x - vt) \quad , y' = y ,\ z' = z$

bzw. $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \;, \quad (\Lambda^\mu{}_\nu)_{x\text{-boost}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

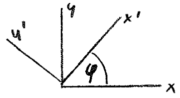
---

eine bequemere Parametrisierung (γ, v nicht unabhängig):

setze $v =: \tanh\theta \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \cosh\theta$

so dass $(\Lambda^\mu{}_\nu)_{x\text{-boost}} = \begin{pmatrix} ch & -sh & 0 & 0 \\ -sh & ch & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $ch \equiv \cosh\theta$, $sh \equiv \sinh\theta$

in Analogie zu den Rotationen z.B. um z-Achse [vgl. EMTP-Vorl.]



$t' = t ,\ x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi ,\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi ,\ z' = z$

bzw. $(\Lambda^\mu{}_\nu)_{z\text{-Rot.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $c \equiv \cos\varphi$, $s \equiv \sin\varphi$

weitere Vokabeln:

a_μ heißt "kovariant", $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ "kontravariant"

ein "Vektor" transformiert unter LT: $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$

ein "Tensor" auch: $a'^{\mu\nu\sigma\ldots} = \Lambda^\mu{}_{\bar\mu} \Lambda^\nu{}_{\bar\nu} \Lambda^\sigma{}_{\bar\sigma} \ldots a^{\bar\mu\bar\nu\bar\sigma\ldots}$

((Skalar = Tensor nullter Stufe
Vektor erster
Matrix zweiter
⋮ ⋮))

((Physik muß sich als (Komp. eines) Tensor(s) beschreiben lassen !!!))

z.B. $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} := \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen von } 0123 \\ -1 & \text{für ungerade} \quad \div \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ist invariant unter eigentlichen LT's

Relevanz: oft sinnvoll ins "Schwerpunkt-System" (CMS) center-of-mass-system zu transformieren, $\sum_i \vec{p}_i = \vec{0}$

1.5 Reminder: QM

Klassische Mechanik: $E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ← hier 1D, der Einfachheit halber

Hamilton-Operator $\hat H = \frac{\hat p^2}{2m} + V(\hat x)$

Schrödinger-Glg $i\partial_t |\psi\rangle = \hat H |\psi\rangle$ ← Zustandsvektor

diktiert Zeitentwicklung

Vertauschungsrelation $[\hat x_i, \hat p_j] = i\delta_{ij}$ ← Kronecker-Delta ((=1 für i=j, 0 sonst))

Energie-Eigenzustände $\hat H |n\rangle = E_n |n\rangle$

$$\Rightarrow |n(t)\rangle = e^{-iE_n t} |n(0)\rangle$$

Übergang zur Ortsdarst. $\psi(x,t) = \langle x | \psi(t)\rangle$ (Projektion auf Ortseigenvektor)

$\hat x_i \to x_i$ und $\hat p_i \to -i\partial_i$

→ Schrödinger Glg: $i\partial_t \psi(x,t) = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(x)\right)\psi(x,t)$

konkretes Beispiel: harmonischer Oszillator

$$\hat H = \frac{\hat p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat x^2$$

algebraische Lsg: $\hat H$ als Absolutquadrat eines Operators darstellen

→ Leiteroperatoren $\hat a$ (Vernichtungs-Op.) $:= \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}$

$\hat a^+$ (Erzeugungs-Op.) $:= \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}}$

$\Rightarrow [a, a^+] = 1$

$\hat H = \frac{\omega}{2}(a^+a + aa^+) = \omega\left(\frac{1}{2} + \underbrace{\boxed{a^+a}}_{\equiv \hat N}\right)$ Besetzungszahl-Op.

mit Eigenzuständen $|n\rangle$ von $\hat N$

$$\Rightarrow \hat a |n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle$$
$$\hat a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$$

oft kann man ein System aber nicht vollständig lösen!

→ wichtiges Werkzeug für Näherungs-Lösungen: Störungstheorie

z.B. $\hat H = \hat H_0 + g\hat V$ wobei $g \ll 1$

Energie-Eigenwerte? Reihe!

$$E_n = E_n^{(0)} + g E_n^{(1)} + g^2 E_n^{(2)} + \dots$$
$$|n\rangle = |n\rangle^{(0)} + g|n\rangle^{(1)} + \dots$$
$$\to \hat H_0 |n\rangle^{(0)} = E_n^{(0)} |n\rangle^{(0)}$$
$$E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n | \hat V | n\rangle^{(0)}$$
$$\vdots$$

es werden oft verschiedene Darstellungen der Zeitabhängigkeit benutzt:

- Schrödinger-Darstellung

  Zustände sind zeitabhängig, Operatoren zeitunabhängig ← z.B. $\hat x, \hat p, \hat L, \dots$

  $i\partial_t |\psi\rangle_S = \hat H |\psi\rangle_S$

  formale Lsg: $|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat H t} |\psi(0)\rangle_S$

  Mittelwerte: $\langle \hat A_S \rangle = {}_S\langle \psi(t) | \hat A_S | \psi(t)\rangle_S$

- Heisenberg-Darstellung

  Operatoren folgen einer Bewegungsglg, Zustände zeitunabhängig
  (sind also zeitabhängig)

  def. $\hat A_H(t) := e^{i\hat H t} \hat A_S e^{-i\hat H t}$; $|\psi\rangle_H = e^{i\hat H t} |\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S$

  $\Rightarrow i\partial_t \hat A_H(t) = [\hat A_H(t), \hat H]$

  $\langle \hat A_H(t) \rangle = {}_S\langle \psi(0) | \hat A_H(t) | \psi(0)\rangle_S$

- Wechselwirkungs-Darstellung (oder Dirac-Darst.)

(liegt gewissermaßen zwischen Schröd.- + Heis.-Darst.)

$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ (Interaction = Ww.)

$|\psi(t)\rangle_I := e^{i\hat{H}_0 t}|\psi(t)\rangle_S$

$\hat{A}_I(t) := e^{i\hat{H}_0 t}\hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t}$

$\hat{V}_I(t) := e^{i\hat{H}_0 t}\hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t}$

so dass $i\partial_t|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t}[-\hat{H}_0 + \hat{H}]|\psi(t)\rangle_S = g\hat{V}_I(t)|\psi(t)\rangle_I$

und $i\partial_t\hat{A}_I(t) = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0]$

mit Zeitentwicklungs-Operator $\hat{U}_I(t,t_0)$

$|\psi(t)\rangle_I := U_I(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_I$

folgt dann $i\partial_t\hat{U}_I(t,t_0) = g\hat{V}_I(t)\hat{U}_I(t,t_0)$

und natürlich $\hat{U}_I(t_0,t_0) = \mathbb{1}$ als "Anfangsbedingung"

↳ [Lösung dieser Dgl.: s. Ü9]

2. Beschreibung freier Teilchen. Rel. QM

relativistische Teilchen ⇒ QFT.

zunächst jedoch freie Teilchen ⇒ relativistische "klassische" QM od.

2.1. Grundgleichungen

Klein-Gordon-Glg. (Spin 0)

Erinnerung: nichtrel. Beziehung $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

setze $E \to i\partial_t$ und $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

⇒ Schrödinger-Glg. für freies Teilchen mit Masse m

relativistische Verallgemeinerung?

Physik muß Lorentzinvariant sein!

$p_\mu p^\mu = m^2 \Leftrightarrow E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow [-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2]\psi = 0$

also $\boxed{[\partial_\mu\partial^\mu + m^2]\psi = 0}$ "Klein-Gordon-Glg."

Relevanz: beschreibt Eigenschaften freier $J=0$ Teilchen (z.B. π, …)

Lösungen: später…

Dirac-Glg. (Spin $\frac{1}{2}$) 1927

Idee: Dgl 2. Ordnung → (Dgl 1. Ordnung)^2

geht sofort für $\vec{p} = \vec{0}$:

$$0 = p_\mu p^\mu - m^2 \overset{\vec{p}=\vec{0}}{=} (p^0)^2 - m^2 = (p^0-m)(p^0+m)$$

$\Rightarrow (p^0 - m) = 0$ oder $(p^0+m) = 0$: 1. Ordnung in p^0

Ansatz für allgemeinen $\vec{p} \neq \vec{0}$

$$p_\mu p^\mu - m^2 =: (\beta^\varrho p_\varrho - m)(\gamma^\sigma p_\sigma + m)$$

mit 8 zu bestimmenden Koeffizienten: $\beta^\varrho, \gamma^\sigma$

kein Term $\sim p$ auf rhs $\Rightarrow \beta^\mu \overset{!}{=} \gamma^\mu$

quad. Term: $g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \overset{!}{=} \gamma^\mu\gamma^\nu p_\mu p_\nu$ (4)

auf beiden Seiten der Glg (*) steht eine Summe von Termen die quadratisch in p-Komponenten sind:

Koeff-Vergleich $p_0 p_0, p_1 p_1, \ldots$: $1 \overset{!}{=} \gamma^0\gamma^0$, $-1 \overset{!}{=} \gamma^1\gamma^1 = \gamma^2\gamma^2 = \gamma^3\gamma^3$

Koeff-Vergleich $p_\mu p_\nu$, $\mu \neq \nu$: $0 \overset{!}{=} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$

Lösungsversuch: $\gamma^0 = \pm 1$, $\gamma^k = \pm i$ $(k = 1,2,3)$

$\rightarrow$ erfüllt die ersten vier Rels ✓

aber nicht die letzte ↯

Idee (Dirac!): γ könnten Matrizen sein

Def. Antikommutator $\{A, B\} := AB + BA$

dann ist Glg. (*) $\Leftrightarrow$ $\boxed{2g^{\mu\nu} = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}$

Lösungsversuch: γ könnten 2×2-Matrizen sein

z.B. Pauli-Matrizen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

diese erfüllen $2\delta_{k\ell} = \{\sigma_k, \sigma_\ell\}$

aber die vierte unabh. 2×2-Matrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

erfüllt $\{\mathbb{1}, \sigma_k\} = 2\sigma_k$ ↯

Lösungsversuch: γ könnten 3×3-Matrizen sein

wegen $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ $(\mu \neq \nu)$

ist $\mathrm{Det}(\gamma^\mu)\,\mathrm{Det}(\gamma^\nu) = (-1)^3\,\mathrm{Det}(\gamma^\nu)\,\mathrm{Det}(\gamma^\mu)$ ← oder N bei N×N-Matrizen

wir fordern $\mathrm{Det}(\gamma^\mu) \neq 0$ $\Rightarrow$ $N\times N$-Matrizen mit ungeradem N ↯

Lösungsversuch: γ als 4×4-Matrizen

$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$ ✓✓ (Standard-Darstellung)

((alles 2×2 Blöcke: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc))

[$\rightarrow$ γ-Gymnastik: Ü10]

also: $0 = p_\mu p^\mu - m^2 = (\gamma^g p_g - m)(\gamma^\sigma p_\sigma + m)$

Faktorisierung gelungen ✓

nehme z.B. $0 = \gamma^\mu p_\mu - m$ (($+m$ ist äquivalent, s. später..))

jetzt wieder $p^0 = E \rightarrow i\partial_t$ und $p_i = -p^i \rightarrow i\partial_i$ (($\Leftrightarrow p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$))

so daß $\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0}$ "Dirac-Glg"

Bemerkung: $\underline{4}$ Gln: ψ ≡ Dirac-Spinor = 4-komponentiger Spaltenvektor

und $m := m \cdot \mathbb{1}_{4\times4}$

Relevanz: beschreibt Eigenschaften freier $J = \frac{1}{2}$ Teilchen

($z.B.$ $e^-, \mu^-, \ldots$)

Spin $\frac{1}{2}$ hat 2 Freiheitsgrade

Dirac-Spinor ψ hat 4 Freiheitsgrade = Teilchen + Antiteilchen (!)

Lösungen: später..

Maxwell-Glg (Spin 1)

((Einheiten: $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, und natürlich $c = 1$))

(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varrho$ (2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

(2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ (4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \vec{j}$

können wir dies auch Lorentz-kovariant aufschreiben?

def. Vierer-Strom $j^\mu := (\varrho, \vec{j})$

Vierer-Potential $A^\mu := (\phi, \vec{A})$

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}$

erfüllen (2), (3) identisch ✓

Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu}$ Maxwell-Glg

z.B. $\nu = 0$: $\partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = j^0 = \varrho$ $\hat{=}$ Max (1) ✓

NB: das Viererpotential A^μ ist nicht eindeutig bestimmt:

jedes $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$ (mit beliebigem $\chi(x)$)

ist auch eine Lsg, d.h. gilt dasselbe $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\chi = F^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ "Eichfreiheit"

die freien Maxwell-Glg

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = (\overset{\equiv \partial_\mu\partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 = \text{"d'Alembert-Operator"}}{\boxed{\square}}\,\delta^\nu_\mu - \partial^\nu\partial_\mu) A^\mu$$

sind also im Wesentlichen zur KG-Glg äquivalent.

2.2 Lösungen der Grundgleichungen

Klein-Gordon (KG) - Glg (s. S. 12)

$$0 = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi$$

$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = ?$ kann i.A. reell oder komplex sein

Ansatz (ebene Welle) $\phi(x) = C\cdot e^{-ikx} = C\cdot e^{-ik^\mu x_\mu} = C\cdot e^{-ik_\mu x^\mu}$

einsetzen $\Rightarrow$ $\left((-ik_\mu)(-ik^\mu) + m^2\right) C\, e^{-ikx} = 0$

$\Rightarrow$ $k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} =: \pm E_{\vec{k}}$

allg. Lsg ist LK ebener Wellen, mit bel. Koeff. C

$$\phi(x) = \int d^3\vec{k}\left(C_+(\vec{k})\, e^{-iE_{\vec k}t + i\vec{k}\vec{x}} + C_-(\vec{k})\, e^{+iE_{\vec k}t + i\vec{k}\vec{x}}\right)$$

$$= \int d^3\vec{k}\left(C_+(\vec{k})\, e^{-iE_{\vec k}t + i\vec{k}\vec{x}} + C_-(-\vec{k})\, e^{iE_{\vec k}t - i\vec{k}\vec{x}}\right)$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}}}\left(a_{\vec p}\, e^{-ipx} + b^*_{\vec p}\, e^{ipx}\right)$$

---

im 2. Schritt: $\vec{k} \to -\vec{k}$ im zweiten Term

im 3. Schritt: $\vec{k} \to \vec{p}$, $E_{\vec k} \to E_{\vec p} =: p^0$

$\rightsquigarrow$ $p\cdot p = m^2$, $p\cdot x = E_{\vec k}t - \vec{k}\vec{x}$

$$C_+(\vec{k}) \to \frac{a_{\vec p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}}}, \quad C_-(-\vec{k}) \to \frac{b^*_{\vec p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}}}$$

wieviele Freiheitsgrade hat diese Lsg?

$a_{\vec p}, b^*_{\vec p}$ unabhängig voneinander $\Rightarrow$ $\phi \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ 2 Freiheitsgrade (z.B. $\pi^\pm$)

$a_{\vec p} = b_{\vec p}$ $\Rightarrow$ $\phi \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ 1 Freiheitsgrad (z.B. π^0)

Teilcheninterpretation? ein Teilchen (Masse m, Impuls $\vec{q}$)?

- $a_{\vec p} \sim \delta(\vec{p} - \vec{q})$, $\phi(x) \sim e^{-iE_{\vec q}t + i\vec{q}\vec{x}}$

  $b_{\vec p} \sim \delta(\vec{p} - \vec{q})$, $\phi(x) \sim e^{+iE_{\vec q}t - i\vec{q}\vec{x}}$

  $\rightarrow$ KG-Glg enthält immer auch neg. E.-Lsg!

  $\rightarrow$ Universum instabil?

- bilde $(i\phi^*)(KG) - (i\phi)(KG)^*$

$$0 = (i\phi^*)(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \underset{\sim}{+m^2})\phi - (i\phi)(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \underset{\sim}{+m^2})\phi^*$$

$$= \partial_t\left[i(\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*)\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[-i(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*)\right]$$

$$=: \partial_t\varrho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \qquad \left(\left(\text{Conti: } \partial_\mu j^\mu = 0\right)\right)$$

$\vec{j}$: W.-Stromdichte

ϱ: Wahrscheinlichkeitsdichte

$\varrho \sim \pm 2E_{\vec q}$! negative Wahrsch.? ↯ $\underset{\sim}{E<0, \varrho<0}$

historisch: Verwirrung; Problem: Teilcheninterpretation.

$\rightarrow$ Feynman-Stückelberg-Interpretation [s. z.B. Halzen/Martin §3.5]

Grundidee $e^{+iEt} = e^{-iE(-t)}$

Teilchen mit $E>0$, propagiert rückwärts in Zeit

$\hat{=}$ Antiteilchen, das vorwärts propagiert

$\xrightarrow{\quad}_t$: Teilchen $\hat{=}$ ——▶——

Antiteilchen $\hat{=}$ ——◀——

Zweite Quantisierung

Abkehr von der Willkür verschiedener Interpretationen

Feld $\phi(x) \rightarrow$ Operator $\hat\phi(x)$ ($\hat=$ Quanten Feld Theorie)

QM : $[\hat x, \hat p] = i \longrightarrow$ QFT : $[\hat\phi(t,\vec x), \partial_0 \hat\phi^+(t,\vec y)] = i\delta^{(3)}(\vec x - \vec y)$

diese Vertauschungsrelation wird erfüllt durch

$$\hat\phi(x) = \int \frac{d^3\vec p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}} \left(\hat a_{\vec p}\, e^{-ipx} + \hat b^+_{\vec p}\, e^{ipx} \right)$$

$$\left(\left(\Rightarrow \hat\phi^+ = \qquad \hat a^+ e^+ + \hat b\, e^- \right)\right)$$

mit $[\hat a_{\vec p}, \hat a^+_{\vec q}] = \delta^{(3)}(\vec p - \vec q) = [\hat b_{\vec p}, \hat b^+_{\vec q}]$

$0 = [\hat a_{\vec p}, \hat a_{\vec q}] = [\hat b_{\vec p}, \hat b_{\vec q}] = [\hat a_{\vec p}, \hat b_{\vec q}] = \ldots$ } vgl. harm. Osz. S.9

((Beweis: s. Übung, Aufgabe 11))

$\rightarrow$ QFT-Lsg folgt aus klass. Lsg durch

$a_{\vec p}, a^*_{\vec p}, b_{\vec p}, b^*_{\vec p} \longrightarrow \hat a_{\vec p}, \hat a^+_{\vec p}, \hat b_{\vec p}, \hat b^+_{\vec p}$ (Vernichter + Erzeuger)

Interpretation:

$\hat Q := i\int d^3\vec x \left(\hat\phi^+ \partial_0 \hat\phi - \hat\phi\, \partial_0 \hat\phi^+ \right)$ ist erhalten ((vgl. S.16; Übung, Aufgabe 12))

$= \ldots$ [ϕ einsetzen, $\int d^3\vec x\, e^{i\vec p\vec x} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec p)$, $[a,b]=0$ benutzen]

$$= \int d^3\vec p \left(\frac{1}{2}\left(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} + \underbrace{\hat a_{\vec p}\hat a^+_{\vec p}}_{=\cancel{[a,a^+]}+a^+a}\right) - \frac{1}{2}\left(\hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} + \underbrace{\hat b_{\vec p}\hat b^+_{\vec p}}_{=\cancel{[b,b^+]}+b^+b}\right) \right)$$

$= \int d^3\vec p \left(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} - \hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} \right)$ ist Differenz von Besetzungszahl-Op's !

$\sim$ Anzahl(π^+) − Anzahl(π^-)

$\sim$ Ladung (und nicht Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ darf neg. sein!)

---

sowie

$\hat H = \int d^3\vec x \left((\partial_0\hat\phi)\,\partial_0\hat\phi^+ + (\vec\nabla\hat\phi^+)\cdot\vec\nabla\hat\phi + m^2\hat\phi^+\hat\phi \right)$

$= \ldots$ [ϕ einsetzen, $\int d^3\vec x\, e^{i\vec p\vec x} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec p)$, $[a,b]=0$ benutzen]

$= \int d^3\vec p\; E_{\vec p} \left(\frac{1}{2}\left(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} + \hat a_{\vec p}\hat a^+_{\vec p}\right) + \frac{1}{2}\left(\hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} + \hat b_{\vec p}\hat b^+_{\vec p}\right) \right)$

$= \int d^3\vec p\; E_{\vec p} \left(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} + \hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} + \delta^{(3)}(\vec 0) \right)$ ist Summe von Bes.-zahl-Op's !

$=$ positiv !

$\sim$ Gesamtenergie

"Vakuumenergie" unphysikalisch !

falls Volumen des Systems endlich

$\left(\left((2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec 0) = \int d^3x\, e^{i0\cdot x} = \int d^3x \rightarrow \int_{(V)} d^3x = V \right)\right)$

haben also keine neg. Energien mehr.

$\hat a_{\vec p}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec p$;
dieses muss also im Anfangszustand vorhanden sein.

$\hat a^+_{\vec p}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\vec p$;
dieses muss also im Endzustand vorhanden sein.

$\Rightarrow$ $\hat a_{\vec p}$ repräsentiert ein einlaufendes Teilchen
$\hat a^+_{\vec p}$ auslaufendes Teilchen
$\hat b_{\vec p}$ einlaufendes Antiteilchen
$\hat b^+_{\vec p}$ auslaufendes Antiteilchen

	T.	A.
ein	$\hat a_{\vec p}$	$\hat b_{\vec p}$
aus	$\hat a^+_{\vec p}$	$\hat b^+_{\vec p}$

Maxwell-Glg (s. S. 15)

strukturell: Max $\approx$ KG ; benutze Lsg der KG mit kleinen Änderungen

wegen "Eichfreiheit" dürfen wir von den Lsn

(z.B.) fordern: $\partial_i A^i(t,\vec x) \equiv 0$ "Coulomb-Eichung"

$\Rightarrow (\text{Max})^{\nu=0}$: $\partial_i\partial^i A^0 = j^0$

(Greens zu Δ) $\Rightarrow A^0(t,\vec x) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec x'\, \frac{\rho(t,\vec x')}{|\vec x - \vec x'|}$

$\rightarrow A^0 \sim \rho$ in Coulomb-Eichg. keine Wellen.

$\partial_i A^i = 0$ benutzt

$\Rightarrow (\text{Max})^{\nu=i}: \quad \partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial_0 \partial^i A^0 = j^i$

$\Leftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^i = j^i + \partial_0 \partial^i A^0$; 3 (inhom.) Wellengln!

also können wir für die ~~freien~~ Max. $(\varrho = 0, \vec{j} = \vec{0})$

$A^0 = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^i = 0, \quad \partial_i A^i = 0$ (Coulomb-Eichg)

Lösungen als ebene Wellen finden

Wie KG. Hier aber:

- $A^\mu(t,\vec{x})$ reell $\Leftrightarrow$ $\hat{A}^\mu(t,\vec{x})$ hermitesch $\Leftrightarrow$ $\hat{a}_{\vec{p}} = \hat{b}_{\vec{p}}$
- i.A. gibt es vier verschiedene Lsn A^μ, $\mu = 0,1,2,3$

$\Rightarrow$ Polarisationsvektor $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$

$$\hat{A}^\mu(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \sum_\lambda \varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p}) \left(\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}} e^{-ipx} + \hat{a}^{+(\lambda)}_{\vec{p}} e^{ipx} \right)$$

$\Rightarrow \varepsilon^0_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$ (damit $A^0 = 0$)

$p_i \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$ (damit $\partial_i A^i = \ldots p_i \varepsilon^i \ldots = 0$)

d.h. $\vec{\varepsilon} \perp \vec{p}$: Pol.-vektor $\perp$ Ausbreitungsrichtung

$\Rightarrow \exists$ zwei lin. unabh. Lsn

z.B. $\vec{p} = |\vec{p}|\vec{e}_z \Rightarrow \vec{\varepsilon}_{(1)} = (1,0,0)$

$\vec{\varepsilon}_{(2)} = (0,1,0)$ (oder LK's)

$\Rightarrow$ freies Photon ist transversal polarisiert

für die Summe über alle Polarisationsvektoren gilt die „Vollständigkeitsrelation"

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p})\, \varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^2}$$

(in Coulomb-Eichung)

Bem:
- $A^\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Lsg hat keinen $\hat{b}$-Op. $\Rightarrow \nexists$ Antiphotonen
- $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}} / \hat{a}^{+(\lambda)}_{\vec{p}}$ repräsentiert ein einlaufendes/auslaufendes Teilchen
- Polarisation bestimmt durch $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$, $\lambda = 1,2$

Dirac-Glg

suche Lsn der Dirac-Glg $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$, $\psi(x) = \psi(t,\vec{x}) = ? \in \mathbb{C}$

wieder als ebene Wellen $\psi(x) \sim u(\vec{p})\, e^{-ipx}$

analog Pol.-Vektor $\vec{\varepsilon}(\vec{p})$ in Max-Lsn

d.h. $i\partial_\mu \rightarrow p_\mu$

$\Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\vec{p}) = 0$

bzw. $\boxed{(\not{p} - m)\, u(\vec{p}) = 0}$ mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu$

bzw. (mit Standard-Darst. der γ^μ, s. S. 13)

$$\begin{pmatrix} (p^0-m)\mathbb{1} & -p^k\sigma^k \\ p^k\sigma^k & (-p^0-m)\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (p^0-m)u_1 - p^k\sigma^k u_2 &= 0 \\ p^k\sigma^k u_1 - (p^0+m)u_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{p^0-m} p^k\sigma^k u_2 = \frac{1}{(p^0)^2-m^2} \underbrace{p^k\sigma^k p^j\sigma^j}\, u_1$$

$= p^k p^j \frac{1}{2}\{\sigma^k,\sigma^j\} = p^k p^j \frac{1}{2} 2\delta^{kj} \mathbb{1}_{2\times2} = \vec{p}^2 \mathbb{1}$

$\Rightarrow 1 = \frac{\vec{p}^2}{(p^0)^2 - m^2} \quad \Leftrightarrow \quad p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_{\vec{p}}$

es gilt (wie bei KG) wieder 2 Arten von Lsn: "pos/neg. Energie"

Lsg "pos. Energie": $u(\vec{p})\, e^{-ipx}$, erfüllt $(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0$

$\Rightarrow$ setze $u(\vec{p}) = (\not{p} + m) \cdot c_1 \cdot u_0$ ← Spinor; unabhängig von $\vec{p}$

Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$ (s.u.: aus Norm)

((denn dann $(\not{p} - m)(\not{p} + m)\, c u_0 = (p^2 - m^2)\, c u_0 = 0$))

zwei unabh. (Spin-) Zustände; wähle $u_0 = \begin{pmatrix} \xi_\pm \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

also insgesamt $u(\vec{p},s) = c_1 (\not{p} + m) \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}$, $s = \pm$

Lsg "neg. Energie": $v(\vec{p})\, e^{+ipx}$ mit $p^0 = +E_{\vec{p}}$, erfüllt $(\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0$

$\Rightarrow$ setze $v(\vec{p}) = (\not{p} - m) \cdot c_2 \cdot v_0$

wähle $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_\pm \end{pmatrix}$

so daß $v(\vec{p},s) = c_2 (\not{p} - m) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}$

die Lsn u, v sind orthogonal gewählt: $u^+ v = 0 = v^+ u$

Im Ruhesystem ($(\vec{p}=\vec{0}\ ;\ p^0=m)$) ergibt sich damit

$$u(\vec{0},s) = c_1 \begin{pmatrix} 2m\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} = 2mc_1 \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\vec{0},s) = c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2m\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix} = -2mc_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}$$

def. <u>hermitesch konjugierter</u> Spinor $u^+ := (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$ falls $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$

def. <u>Dirac-adjungierter</u> Spinor $\bar{u} := u^+\gamma^0$

Normierung der Lsn? → Wahl der Konstanten c_1, c_2

fordere $\bar{u}(\vec{p},s)\,u(\vec{p},s') = 2m\,\delta_{ss'}$

$\bar{v}(\vec{p},s)\,v(\vec{p},s') = -2m\,\delta_{ss'}$

($\bar{u}v = 0 = \bar{v}u$ automatisch durch Wahl der u_0, v_0)

$\Rightarrow \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}+m}}$

$\Rightarrow \quad u^+(\vec{p},s)\,u(\vec{p},s') = 2E_{\vec{p}}\,\delta_{ss'} = v^+(\vec{p},s)\,v(\vec{p},s')$

} Beweis s. Übung Aufgabe 14

---

oft (s. z.B. später: Auswertung von "Feynman-Diagrammen") brauchen wir die Summe über alle Spinzustände : <u>Vollständigkeitsrelation</u>

$$\sum_{s=\pm} u_\alpha(\vec{p},s)\,\bar{u}_\varrho(\vec{p},s) = \sum_s c_1^2 \,(\not{p}+m)_{\alpha\beta} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (\xi_s^T\ 0)_\delta}\, (p_\mu \underbrace{\gamma^{\mu+}}_{\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0} + m)_{\delta\sigma}\,\gamma^0_{\sigma\varrho} \text{ , s. Übung 10a}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (1000)_\delta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (0100)_\delta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\beta\delta}$$

$$= \frac{1}{p^0+m} \begin{pmatrix} p^0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p^0+m \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\beta\delta} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}_{\delta\sigma} \begin{pmatrix} p^0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p^0+m \end{pmatrix}_{\sigma\varrho}$$

$$= \frac{1}{p^0+m} \begin{pmatrix} (p^0+m)^2 & -(p^0+m)\vec{p}\vec{\sigma} \\ (p^0+m)\vec{p}\vec{\sigma} & -\vec{p}^2 \end{pmatrix}_{\alpha\varrho}$$

$$= \begin{pmatrix} p^0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p^0+m \end{pmatrix}_{\alpha\varrho}$$

$$= (\not{p}+m)_{\alpha\varrho}$$

(letzter Term:
$(p_\mu\gamma^{\mu+}+m)\gamma^0$
$= (p_\mu\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0+m)\gamma^0$
$= \gamma^0(\not{p}\gamma_0^2+m)$
$= \gamma^0(\not{p}+m)$)

($-\vec{p}^2 = m^2-p_0^2 = (m-p^0)(m+p^0)$)

$$\sum_{s=\pm} v_\alpha(\vec{p},s)\,\bar{v}_\varrho(\vec{p},s) = \ldots = (\not{p}-m)_{\alpha\varrho} \qquad \text{genauso}$$

Zweite Quantisierung

die Lsn der Dirac-Glg werden durch Teilchen- und Antiteilchenzustände interpretiert. [→ s. QFT-Vorlesung]

Hier: die wichtigsten Resultate der QFT-Behandlung als "Zitat"

Felder $\psi(x)$ → Feldoperatoren

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}\, u(\vec{p},s)\, e^{-ipx} + \hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}}\, v(\vec{p},s)\, e^{+ipx} \right)$$

$$\hat{\bar{\psi}} = \qquad \hat{a}^+ \quad \bar{u} \quad e^{+ipx} \qquad \hat{b} \quad \bar{v} \quad e^{-ipx}$$

Vertauschungsrelationen sind <u>Anti</u>kommutatoren

$$\{ \hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+(s')}_{\vec{p}'} \} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta_{ss'} = \{ \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{b}^{+(s')}_{\vec{p}'} \} \quad ; \quad \text{Rest} = 0$$

⇒ Dirac-Felder gehorchen der Fermi-Dirac-Statistik

z.B. 1-Elektron-Zustand $|e^-\rangle \sim \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}|0\rangle$

2- " $|2e^-\rangle \sim \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\,\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ Pauli-Prinzip

Ges.-Energie → Hamilton-Operator (wie bei KG-Glg, s. S. 18)

$$\hat{H} = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}} - \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}\hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}} \right)$$

$$= \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}} + \hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} - \delta^{(3)}(\vec{0}) \right)$$

erhaltene Gesamtladung

$$\hat{Q} = \int d^3\vec{x}\; \hat{\bar{\psi}}\gamma_0\hat{\psi} = \int d^3\vec{p} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}} - \hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} \right)$$

völlig analog zur Lsg der KG-Glg (s. S. 18) interpretiert man die Operatoren $\hat{a}, \hat{b}$ wieder als ein/aus-laufende Teilchen/Antiteilchen:

	Teilchen	Antiteilchen
einlaufendes	$\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}$	$\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}$
auslaufendes	$\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}$	$\hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}}$

Im Zusammenhang mit Dirac-Teilchen ist es nützlich, zwei Konzepte zur Klassifizierung des "Eigendrehimpulses" einzuführen:

Helizität

Def (physikalisch, analog Polarisation des Photons)

Helizität h = (Projektion des Spins auf Bewegungsrichtung)$\cdot 2$

z.B.

$s_z = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow h = \pm 1$

Beschreibung (mathematisch; s. auch Übung, Aufgabe 15)

Helizität $h(\vec{p}) := \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma}$, $\vec{\Sigma} := \left(\begin{array}{c:c} \vec{\sigma} & 0 \\ \hdashline 0 & \vec{\sigma} \end{array}\right)$, $\vec{e}_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

Spin entlang Bewegungsrichtung $\vec{e}_{\vec{p}}$ ist dann $s_{\vec{e}_{\vec{p}}} = \frac{1}{2} h(\vec{p})$

es gilt: $h^2(\vec{p}) = \mathbb{1} \Rightarrow$ EW $= \pm 1$

Projektoren $P_\pm^{(h)} := \frac{1 \pm h}{2}$ $\quad$ ((denn $(P_\pm^{(h)})^2 = P_\pm^{(h)}$, $P_+^{(h)} P_-^{(h)} = 0$, $P_+^{(h)} + P_-^{(h)} = \mathbb{1}$))

→ können jeden Zustand als $u = (P_+^{(h)} + P_-^{(h)})u =: u_+^{(h)} + u_-^{(h)}$ schreiben!

z.B. $\vec{p} = p\vec{e}_z \Rightarrow h(\vec{p}) = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$

$$h(\vec{p})\,u(\vec{p},s) = h(\vec{p})\frac{1}{\sqrt{E_p+m}}\begin{pmatrix} E_p+m & 0 & -p & 0 \\ 0 & E_p+m & 0 & p \\ p & 0 & -E_p+m & 0 \\ 0 & -p & 0 & -E_p+m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} = h(\vec{p})\begin{pmatrix} \sqrt{E_p+m}\,\xi_s \\ \frac{sp}{\sqrt{E_p+m}}\xi_s \end{pmatrix} = s\,u(\vec{p},s)$$

⇒ Helizitäts-EW ist s!

Chiralität

Def (mathematisch; s. auch Übg, Aufgabe 15)

Chiralitätsoperator $\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

es gilt: $\gamma_5{}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ EW $= \pm 1$

Projektoren $P_{R/L} := \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ $\quad$ ((denn $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$, $P_L + P_R = \mathbb{1}$))

→ können jeden Zustand als $u = (P_L + P_R)u =: u_L + u_R$ schreiben!

$\quad$ u_L: "linkshändig", u_R: "rechtshändig"

Beschreibung (physikalische Relevanz)

- die schwache Wechselwirkung wirkt nur auf linkshändige Teilchen (s. später)
- masselose Teilchen: Chiralität $\hat{=}$ Helizität

  z.B. $\vec{p} = p\vec{e}_z$, $m = 0$ $\Rightarrow u(\vec{p},s) = \sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \xi_s \\ s\xi_s \end{pmatrix}$

  $\gamma_5\, u(\vec{p},s) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \xi_s \\ s\xi_s \end{pmatrix} = \sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} s\xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = s\,u(\vec{p},s)$

  ⇒ Chiralitäts-EW ist s!

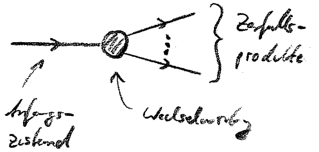
- Neutrinos werden nur in schwachen WW's erzeugt, sind also linkshändig. $m_\nu = 0 \Rightarrow s = -1$: (Ü 15d)

3. wechselwirkende Teilchen

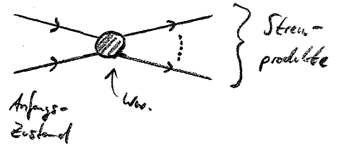
bisher: Beschreibung freier relativistischer Teilchen
(mit Impuls $\vec{p}$; Polarisation λ; Helizität s)

jetzt: Wechselwirkungen erlaubt
haben zwei grundlegende Arten von Prozessen:

Zerfälle



Streuung



3.1 Zerfälle

einige wichtige Vokabeln:

- Lebensdauer τ
  wird meist für ein ruhendes Teilchen angegeben (vgl. Ü 4)
  QM → für ein einziges T. keine genaue Vorhersage
  → τ ist "mittlere" Lebensdauer

- Zerfallsrate Γ ≙ Wahrscheinlichkeit (pro Zeiteinheit) dass Zerfall stattfindet

  T.-Zahl N, $dN = -\Gamma N\, dt \Rightarrow N(t) = N(0)\, e^{-\Gamma t}$

  es gilt $\Gamma = \frac{1}{\tau}$

  ((denn: $\tau = \langle t \rangle = \frac{\int_0^\infty dt\; t\; N(t)}{\int_0^\infty dt\; N(t)} = \frac{-\partial_\Gamma \int dt\, e^{-\Gamma t}}{\int dt\, e^{-\Gamma t}} \overset{x=\Gamma t}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{-\partial_\Gamma \frac{1}{\Gamma}}{\frac{1}{\Gamma}} = \frac{1}{\Gamma}$ ●))

- Zerfallskanal i (i beschreibt Art der Zerfallsprodukte; s. PDG)

  z.B. Zerfallrate in diesem Kanal $= \Gamma_i$

- Gesamtzerfallsrate $\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i$

- Verzweigungsverhältnis Γ_i / Γ_{tot}

  Je größer also das Verzweigungsverhältnis, desto mehr Zerfälle im Kanal

Berechnung der Zerfallsrate

per zeitabhängiger Störungstheorie im Ww-Bild (s. S.11 und Ü9)

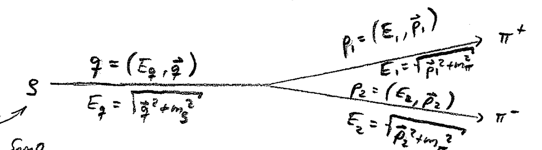
$$\underset{\text{freie T.}}{\hat{H} = \hat{H}_0} + g \underset{\text{Ww}}{\hat{V}} \quad ; \quad |\psi(t)\rangle_I = \underbrace{\hat{U}_I(t,t_0)}_{\text{Zeitentwicklungs-Op.}} |\psi(t_0)\rangle_I \qquad \text{Zeitentwicklungs-Op.} = \mathbb{1} - ig\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{V}_I(t') + O(g^2)$$

def Streumatrix $S_{fi} := {}_I\langle f | \hat{U}_I(+\infty,-\infty) | i \rangle_I$

↑ Endzust. ("final") ↑ Anfangszustand ("initial")

→ für $g = 0$ ist S_{fi} diagonal

z.B.



hier Annahme: Spin 0
(eigentlich Spin 1)

Ww. habe die Form $g \hat{V}_I(t') = \int d^3x\; \mathcal{M}\; \hat{\phi}^\dagger(t',\vec{x})\, \hat{\phi}(t',\vec{x})\, \hat{\rho}(t',\vec{x})$

↑ Konstante

mit

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_1}} \left(\hat{a}_{\vec{p}_1} e^{-ip_1x} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}_1} e^{+ip_1x} \right)$$

← erzeugt Antiteilchen, ≙ auslaufendes π^+

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_2}} \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_2} e^{+ip_2x} + \hat{b}_{\vec{p}_2} e^{-ip_2x} \right)$$

← erzeugt Teilchen, ≙ auslaufendes π^-

$$\hat{\rho}(x) = \int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_q}} \left(\hat{a}_{\vec{q}} e^{-iqx} + \hat{a}^\dagger_{\vec{q}} e^{+iqx} \right)$$

← vernichtet Teilchen, ≙ einlaufendes ρ

---

damit wird das nicht-triviale Matrixelement

(in erster Ordnung Stö.)

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \left\langle \pi^+(\vec{p}_1)\pi^-(\vec{p}_2) \right| \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x\; \mathcal{M}\; \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}\, \hat{\rho} \left| \rho(\vec{q}) \right\rangle \\ &= -i \int dt' \int d^3x\; \mathcal{M} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_1}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_2}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_q}}\, e^{i(p_1+p_2-q)x} \\ &= -i\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\, \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_1}\sqrt{(2\pi)^3 2E_2}\sqrt{(2\pi)^3 2E_q}} \\ &=: -i\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\; T_{fi} \end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ ← Amplitude

T_{fi} ← Transfermatrixelement

↑ E-p-Erhaltung; kommt automatisch heraus.

zur Berechnung der Zerfallsrate des ρ müssen wir über die Impulse aller auslaufenden Teilchen integrieren: (($\Gamma \sim \frac{\text{Wahrsch.}}{\text{Zeit}} \sim \frac{|S|^2}{T}$, s. S. 25))

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{T} \int d^3p_1 \int d^3p_2\; |S_{fi}|^2 \\ &= \frac{1}{T} \int d^3p_1 \int d^3p_2\; (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\; \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)}_{= V \cdot T}\; |T_{fi}|^2 \end{aligned}$$

$= V \cdot T$, vgl. S.18

das ρ im Anfangszustand ist ebene Welle, also überall im Raum.

Normierung $\langle \rho(\vec{q}) | \rho(\vec{q}) \rangle = \delta^{(3)}(\vec{0}) = \frac{V}{(2\pi)^3}$

((denn: $\langle \rho(\vec{p}) | \rho(\vec{q}) \rangle = \langle 0 | \overset{\leftrightarrow}{\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}} | 0 \rangle$

$= \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] + \cancel{\hat{a}^\dagger_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}}} | 0 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) \langle 0|0 \rangle$))

also teilen wir für ein Teilchen mit Norm $\langle \rho|\rho \rangle \equiv 1$ durch $V/(2\pi)^3$:

$$\boxed{\Gamma_{\rho\to\pi^+\pi^-} = \frac{1}{2E_{\vec{q}}} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\; |\mathcal{M}|^2}$$

"Fermi's Goldene Regel"

$$\Gamma_{\rho\to 1\ldots n} = \frac{1}{2E_{\vec{q}}}\, c\, \underbrace{\int d\Phi_n}\, |\mathcal{M}|^2$$

$$\int d\Phi_n \equiv \left(\prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - q \right)$$

= "n-Teilchen Phasenraumintegration"

statistischer Faktor, z.B. $c = \frac{1}{N!}$ für N identische T.

zur endgültigen Berechnung der Zerfallsrate muss jetzt "nur noch" die Phasenraumintegration ausgeführt werden.

z.B. für $A \to 1+2$ im A-Ruhesystem ← s. Übung, Aufgabe 17

nützlich: Phasenraumintegration Lorentz-invar. schreiben (($p = (p^0, \vec{p})$))

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\, \delta(p^2 - m^2)\,\Theta(p^0) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp_0\, \delta(p_0^2 - E_{\vec{p}}^2) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}}$$

((via $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ für <u>ein</u>fache Nullstellen x_i von f))

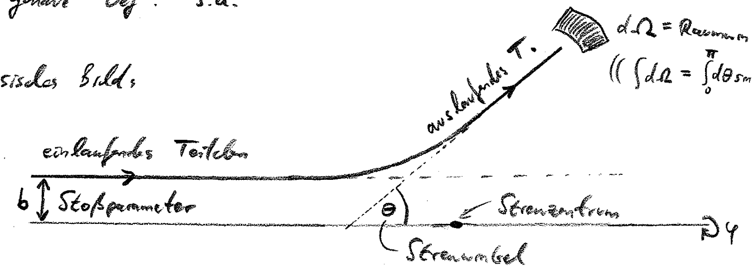
3.2 Streuprozesse

wichtige Vokabeln:

- elastische Streuung / inelastische Streuung
  $1+2 \to 1+2$ / $1+2 \to 1+2+3+\ldots$ oder $1+2 \to 3+4$ etc
- exklusiver Prozeß / inklusiver Prozeß
  alle Streuprodukte werden untersucht / nur ein Teil der Streuprodukte werden identifiziert: z.B. $1+2 \to 3+$"Rest"
- Wirkungsquerschnitt σ
  klassisch: Größe des Ziels, aus der Sicht des einlaufenden T.
  QM: ähnlich; hängt von v ($\hat{=} E$) der T. ab.
  E-Abhängigkeit kann groß sein; bei "Resonanzenergie" wirkt Ziel groß!

  genaue Def: s.u.

klassisches Bild:



$d\Omega$ = Raumwinkel = $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$
(($\int d\Omega = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$))

- barn ("Scheune")
  oft benutzte Einheit von σ. 1 barn = $10^{-28}\,\mathrm{m}^2 = (10\,\mathrm{fm})^2$
  $\hat{\approx}$ geometrischer Querschnitt schwerer Atome (z.B. Uran)

---

def <u>differentieller Streuquerschnitt</u> $\frac{d\sigma}{d\Omega} := \frac{1}{L_{ein}} \frac{d^2N_{aus}}{d\Omega\, dt}$

Luminosität = $\frac{d^2N_{ein}}{dA\, dt}$
= Anzahl der einlaufenden T. pro Zeit- und Flächeneinheit

Anzahl der in Richtung $\Omega = (\theta, \varphi)$ beobachteten auslaufenden T. pro Zeiteinheit pro Raumwinkel

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right] = \frac{1}{\frac{1}{m^2 s}} \frac{1}{s} = m^2 = [\text{Fläche}]$$

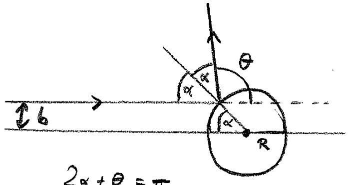
⇒ Ereignisrate = Wirkungsquerschnitt · Luminosität

def <u>totaler Wirkungsquerschnitt</u>

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi)$$

((oft: $u := \cos\theta$, $\int_0^\pi d\theta \sin\theta = \int_{-1}^1 du$))

Bsp: Streuung an harter Kugel



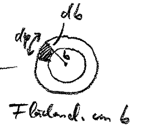
Frage: $\sigma = ?$

hier $b \leftrightarrow \sigma$: $b = R \sin(\alpha)$, $2\alpha + \theta = \pi$
$= R \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) = R \cos(\frac{\theta}{2})$

Luminosität $L_{ein} = \frac{N_{ein}}{V} \cdot v$ ← Geschw. d. ein- (und aus-) laufenden T.

zwischen $\theta, \theta + d\theta$ beobachtet man Teilchen aus $b, b+db$
mit $db = -\frac{R}{2} \sin(\frac{\theta}{2})\, d\theta$

also $\frac{d^2N_{aus}}{d\Omega\, dt} = \frac{1}{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi} \frac{N_{ein}}{V} \cdot v\, |b\, db\, d\varphi|$



$$= L_{ein} \frac{R\cos(\frac{\theta}{2})\ \frac{R}{2}\sin(\frac{\theta}{2})\, d\theta\, d\varphi}{\sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi}$$

$$= L_{ein} \frac{R^2}{4} \qquad ((\text{da } \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)))$$

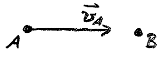
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

und $\underline{\underline{\sigma = \int d\Omega \frac{R^2}{4} = \pi R^2}}$ ist klassischer Querschnitt der Kugel!

- Luminosität in Teilchenstößen

$A + B \to$ "irgendetwas".

$m_B \neq 0$ → gehe ins Ruhesystem von Teilchen B



Normierung $\langle A|A\rangle = 1 = \langle B|B\rangle$

((≙ nur ein T. A und ein T. B im ganzen Volumen V))

Luminosität der einlaufenden ebenen A-Welle ist dann

$$L_{ein} = \frac{1}{V} |\vec v_A|$$

↖ Geschwindigkeit

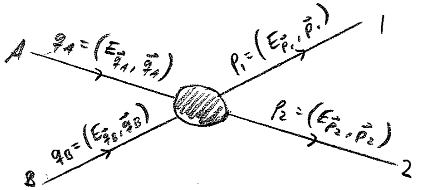
↖ durchschnittliche Teilchendichte

Goldene Regel für Streuprozesse

"Rezept" wie bei Zerfallsrate: Amplituden ($\mathcal{M}$) ← dynamische Information; bzw; → Feynmanregeln, s.u.

Phasenraum ← kinematische Information; $m, E, \vec p$

z.B.



$$\hat H = \hat H_0 + g\hat V \quad \text{mit} \quad g\hat V = \int d^3\vec x\, \mathcal{M}\, \hat\phi_A \hat\phi_B \hat\phi_1 \hat\phi_2$$

berechnen wieder (vgl. S. 25,26) Streumatrixelement in 1.Ordn. Stö

einl. T. $\to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec q}}}\, e^{-iqx}$, ausl. T. $\to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}}\, e^{+ipx}$

$$S_{fi} = -i \langle \phi_1(\vec p_1)\phi_2(\vec p_2) | \int dt' d^3\vec x\, \mathcal{M}\, \hat\phi_A \hat\phi_B \hat\phi_1 \hat\phi_2 | \phi_A(\vec q_A)\phi_B(\vec q_B)\rangle$$

$$= -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_A - q_B) \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}\sqrt{\quad}_{p_2}\sqrt{\quad}_{q_A}\sqrt{\quad}_{q_B}}$$

und, wie oben: Rate $= \frac{|S_{fi}|^2}{T}$; dabei $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \to V \cdot T$

integriere über alle $\vec p_1, \vec p_2$ für totalen Wirkungsquerschnitt

2 ebene Wellen im Anfangszustand

→ teile für 2 Teilchen durch $\left[\frac{V}{(2\pi)^3}\right]^2$

$$\Rightarrow \frac{dN_{aus}}{dt} = \text{totale Ereignisrate}$$

$$= \frac{1}{V\, 2E_{\vec q_A} 2E_{\vec q_B}} \underbrace{\int \frac{d^3\vec p_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_1}} \int \frac{d^3\vec p_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_A - q_B)}_{=: \int d\Phi_2} |\mathcal{M}|^2$$

$= L_{ein} \cdot \sigma$ (laut Def., s.S. 28)

gehe ins Ruhesystem von B (s.S. 29 oben)

$= \frac{|\vec v_A|}{V} \cdot \sigma$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1}{F} \int d\Phi_2\, |\mathcal{M}|^2} \quad \text{Goldene Regel}$$

mit $\int d\Phi_n := \left(\prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3\vec p_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j - q_A - q_B \right)$

und Flussfaktor $F = 4|\vec v_A|\, E_{\vec q_A} m_B$ (im B-Ruhesyst.)

↖ sieht hier nicht sehr L-inv. aus!

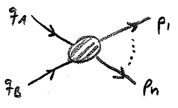
$\int d\Phi_n$ ist L-inv (s.S.27), $|\mathcal{M}|^2$ auch

⇝ F in L-inv. Form schreiben:

$$= 4 \frac{|\vec q_A|}{E_{\vec q_A}} E_{\vec q_A} m_B = 4\sqrt{\vec q_A^{\,2} m_B^2} = 4\sqrt{(E_{\vec q_A}^2 - m_A^2)\, m_B^2}$$

$$= 4\sqrt{(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2} \quad \left(\left(\text{denn } q_B = (m_B, 0),\ q_A = (E_{\vec q_A}, \vec q_A)\right)\right)$$

Insgesamt haben wir also die Goldene Regel in allg. Form



$$: \quad \sigma_{2\to n} = \frac{1}{F} \int d\Phi_n\, |\mathcal{M}|^2$$

↖ Amplitude

↖ Phasenraumint., s.o.

$$F = 4\sqrt{(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$$

Der Flussfaktor F kann auf verschiedene Art und Weise geschrieben werden:

z.B mit Hilfe der kinematischen Invariante $s := (q_A + q_B)^2$

$$F = 2\sqrt{(2q_A \cdot q_B)^2 - 4m_A^2 m_B^2} = 2\sqrt{(s - q_A^2 - q_B^2)^2 - 4m_1^2 m_B^2}$$

$$= 2\sqrt{(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2}$$

((**Bem.:** s wird häufig verwendet, denn es ist

die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem $= E_A + E_B = \sqrt{s}$;

denn: CMS $\xrightarrow{\vec{q}_A}\ \xleftarrow{\vec{q}_B = -\vec{q}_A}$ $\Rightarrow$ $q_A = (E_{\vec{q}_A}, \vec{q}_A)$

$q_B = (E_{\vec{q}_B}, -\vec{q}_A)$

"center of mass system"

also $q_A + q_B = (E_A + E_B, \vec{0})$ mit $E_A = \sqrt{\vec{q}_A^{\,2} + m_A^2}$, $E_B = \sqrt{\vec{q}_A^{\,2} + m_B^2}$

und $(q_A + q_B)^2 = (E_A + E_B)^2 = s$ ■))

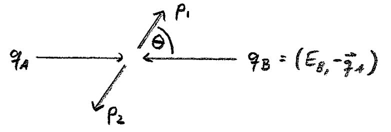
<u>oder z.B.</u> im Schwerpunktsystem (CMS)

$$\begin{aligned}(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2 &= (E_A E_B + \vec{q}_A^{\,2})^2 - m_A^2 m_B^2 \\ &= E_A^2 E_B^2 + 2 E_A E_B \vec{q}_A^{\,2} + (\vec{q}_A^{\,2})^2 - m_A^2 m_B^2 \\ &= \vec{q}_A^{\,2} \left(2\vec{q}_A^{\,2} + m_A^2 + m_B^2 + 2 E_A E_B\right) = \vec{q}_A^{\,2} (E_A + E_B)^2\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow F = 4(E_A + E_B)|\vec{q}_A|$

Bsp: Phasenraumintegration für Zweikörper-Streuung

$A + B \to 1 + 2$ im CMS:



$$\begin{aligned}d\sigma_{2\to 2} &= \frac{1}{F}\, d\Phi_2\, |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{4(E_A+E_B)|\vec{q}_A|} \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \overbrace{\delta(E_1+E_2-E_A-E_B)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}^{=\delta^{(4)}(\Sigma p - \Sigma q) \text{ im CMS}} |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

s.o.

nutze $\delta^{(3)}$ für $\vec{p}_2$-Integration. Nachlässigkeit in Bezeichnung: wieder $d\sigma$

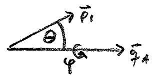
$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{q}_A|(E_A+E_B)}\, d^3\vec{p}_1\, \frac{\delta\left(\sqrt{m_1^2+\vec{p}_1^{\,2}} + \sqrt{m_2^2+\vec{p}_1^{\,2}} - E_A - E_B\right)}{\sqrt{m_1^2+\vec{p}_1^{\,2}}\,\sqrt{m_2^2+\vec{p}_1^{\,2}}}$$

wovon kann $|\mathcal{M}|^2$ abhängen?

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, \vec{q}_B, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, -\vec{q}_A, \vec{p}_1, -\vec{p}_1) = |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, \vec{p}_1) \\ &= |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A^{\,2}, \vec{p}_1^{\,2}, \vec{q}_A \cdot \vec{p}_1) = |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)\end{aligned}$$

da $|\mathcal{M}|^2$ ein Skalar sein muss

Schreibe $\vec{p}_1$-Integration in Kugelkoordinaten um $\vec{q}_A$



$d^3\vec{p}_1 = \rho^2 d\rho\, d\Omega$, $\rho \equiv |\vec{p}_1|$

$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

substituiere $\rho \to E := \sqrt{m_1^2+\rho^2} + \sqrt{m_2^2+\rho^2}$ in Radialintegration

$$\Rightarrow dE = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m_1^2+\rho^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m_2^2+\rho^2}}\right) 2\rho\, d\rho = E \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{m_1^2+\rho^2}\,\sqrt{m_2^2+\rho^2}}$$

und $\rho(E) = \frac{1}{2E}\sqrt{E^4 - 2E^2(m_1^2+m_2^2) + (m_1^2-m_2^2)^2}$

((denn: $E^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\rho^2 + 2\sqrt{1}\sqrt{2}$

$(E^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2\rho^2)^2 = 4(m_1^2+\rho^2)(m_2^2+\rho^2)$

$E^4 + m_1^4 + m_2^4 + \cancel{4\rho^4} - 2E^2 m_1^2 - 2E^2 m_2^2 - 4E^2\rho^2 + 2m_1^2 m_2^2 + \cancel{4m_1^2\rho^2} + \cancel{4m_2^2\rho^2}$

$= 4m_1^2 m_2^2 + \cancel{4m_1^2\rho^2} + \cancel{4m_2^2\rho^2} + \cancel{4\rho^4}$

diese Glg nach ρ^2 auflösen ■))

können auch noch $E_A + E_B = \sqrt{s}$ im CMS verwenden

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega} &= \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{|\vec{q}_A|\sqrt{s}} \int_{m_1+m_2}^{\infty} \frac{dE}{E}\rho(E)\, |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, \rho(E), \cos\theta) \cdot \delta(E - \sqrt{s})\end{aligned}$$

Deltafkt schlägt nur für $\sqrt{s} > m_1 + m_2$ zu!

$$= \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{|\vec{q}_A|\sqrt{s}}\frac{1}{\sqrt{s}}\rho(\sqrt{s})\, |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, \rho(\sqrt{s}), \cos\theta) \cdot \Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$$

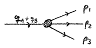
aber $\rho = |\vec{p}_1|$, s.o., so daß $\rho(\sqrt{s})$ das durch E-p-Erhaltung fixierte $|\vec{p}_1|$ ist

$$= \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{q}_A|}\underline{\frac{|\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)}{(E_A+E_B)^2}}$$

<u>Bem.:</u>

- konnten für $2\to 2$ Streuung also Phasenraumintegration ohne explizite Kenntnis von $|\mathcal{M}|^2$ ausführen!
- im Allgemeinen geht das <u>nicht</u> bei $2 \to n > 2$
- haben im CMS gearbeitet, und $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ durch Variablen in diesem System ausgedrückt.
- manchmal bequemer: Lorentz-Invariante Variablen
  L-inv: m_A, m_B, m_1, m_2 ; <u>Mandelstam-Variablen</u>
  ↳ s. Übung, Aufgabe 21
  $$\left\{\begin{array}{l} s := (q_A + q_B)^2 \\ t := (q_A - p_1)^2 \\ u := (q_A - p_2)^2 \end{array}\right.$$

- bei $2 \to n>2$ Streuung ist die Kinematik etwas komplizierter, z.B.

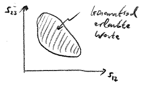


$\Rightarrow$ $s_{12} := (p_1+p_2)^2$

$s_{13} := (p_1+p_3)^2$

$s_{23} := (p_2+p_3)^2$

$\Big\}$ $s_{12}+s_{13}+s_{23} =$
$= (q_A+q_B)^2 + p_1^2+p_2^2+p_3^2$
$= s + m_1^2+m_2^2+m_3^2 = \text{const}$
$\rightsquigarrow$ zwei genügen!



"Dalitz-Plot": stellt die erlaubte Region dar.
Jeder Punkt $\hat{=}$ einer Geometrie des Endzustandes

- eine tiefergehende Behandlung der Phasenraumintegration ist z.B. in [Fayyazuddin/Riazuddin, "Modern Intro. to Particle Phys.", s. 3-body phase space]

jetzt fehlt uns nur noch eine Methode, um $|M|^2$ zu berechnen!
das geht am besten mit "Feynman-Diagrammen", die graphisch sehr anschaulich sind, und sich daher als eine "Sprache" in der Teilchenphysik durchgesetzt haben.

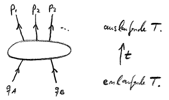
3.3 Feynman-Regeln

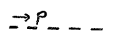
$\hat{=}$ Algorithmus zur Berechnung der Amplitude $\mathcal{M}$
in quantenfeldtheoretischen Prozessen

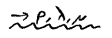
mathematischen Ausdrücken werden graphische Bausteine zugeordnet

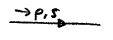
① externe Linien

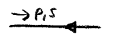
werden durch ihren Viererimpuls bezeichnet
Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen: zusätzlich Helizität s
Spin 1-Teilchen: zusätzlich Polarisation λ



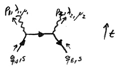
 Spin-0-T., Viererimpuls p $\Rightarrow$ $\delta\mathcal{M} = 1$

 Spin-1-T. (Photon) $\Rightarrow$ $\delta\mathcal{M} = \varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}(\vec{p})$

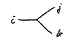
 Spin-$\frac{1}{2}$-T. (Elektron) $\Rightarrow$ $\delta\mathcal{M} = u(\vec{p},s)$, $\delta\mathcal{M} = \bar{u}(\vec{p},s)$
einlaufend, auslaufend

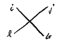
 Spin-$\frac{1}{2}$-Antit. (Positron) $\Rightarrow$ $\delta\mathcal{M} = \bar{v}(\vec{p},s)$, $\delta\mathcal{M} = v(\vec{p},s)$

Bsp: $e^-(q_A,s) + e^+(q_B,s) \to \gamma(p_1,\lambda_1,\mu_1) + \gamma(p_2,\lambda_2,\mu_2)$:



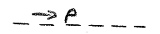
② Vertizes: sind durch $g\hat{V}$ in $\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ bestimmt.
genauer: im Zeitentwicklungs-Operator kommt $-i\int dt'\, g\hat{V}_I(t')$ vor.
im Lagrange-Formalismus ist das $+i\int dt' \int d^3\vec{x}\, \hat{\mathcal{L}}_I$
mit Lagrange-Dichte $\hat{\mathcal{L}}_I$ (= Polynom in Feldoperatoren)
allgemein: $\hat{\mathcal{L}}_I = g_{ijk}\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j\hat{\phi}_k + g_{ijkl}\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j\hat{\phi}_k\hat{\phi}_l + \ldots$

wir schreiben (malen)  3-er Vertex $\Rightarrow$ $\delta\mathcal{M} = i\, g_{ijk}$

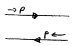
 4er Vertex $\Rightarrow$ $\delta\mathcal{M} = i\, g_{ijkl}$

usw.

③ interne Linien: falls ein Feynman-Diagramm (s.o.) innere Linien hat, entspricht jede dieser Linien einem "Propagator".
Dieser hängt von Impuls/Masse/Art des Teilchens ab, hat aber keinen Spin- bzw Polarisations-Zustand: es ist über alle Möglichkeiten summiert.

 $\Leftrightarrow$ $\delta\mathcal{M} = \frac{i}{p^2-m^2}$

 $\Leftrightarrow$ $\delta\mathcal{M} = \frac{i}{p^2}(-g_{\mu\nu})$

 $\Leftrightarrow$ $\delta\mathcal{M} = \frac{i}{p^2-m^2}(\not{p}+m)$ $\hat{=}$ Vollständigkeitsrelation vgl. Skript S. 21

((Herleitung: die genauen Ausdrücke für Propagatoren folgen aus $\hat{H}_0$))

④ E-p-Erhaltung an jedem Vertex muss der Viererimpuls erhalten sein

⑤ interne Impulse werden per $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ überintegriert

⑥ Antisymmetrisierung (−1) für jede geschlossene Fermion-Schleife.
(−1) zwischen Diagrammen, die sich nur durch Austausch von zwei externen Fermionen unterscheiden.

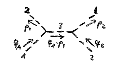
⑦ Gesamtphase alles mit (±i) multiplizieren ((für $|M|^2$ egal))

Bsp WW gegeben durch $\hat{\mathcal{L}}_I = -g\,\hat\phi_1 \hat\phi_2 \hat\phi_3$

Bsp 1

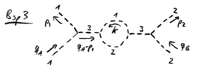
$$\mathcal{M} = \underset{②}{(-ig)}\,\underset{⑦}{(i)} = g$$

Bsp 2



$$\mathcal{M} = (-ig)^2_{②} \left(\frac{i}{(q_A-p_1)^2 - m_3^2}\right)_{③} (i)_{⑦} = \frac{g^2}{(q_A-p_1)^2 - m_3^2}$$

Bsp 3



$$\mathcal{M} = (-ig)^4_{②} \left(\frac{i}{(q_A-p_1)^2 - m_3^2}\right)^2_{③} \left(\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\right)_{⑤} \left(\frac{i}{k^2 - m_1^2}\right)_{③} \left(\frac{i}{(q_A-p_1+k)^2 - m_2^2}\right)_{③} (i)_{⑦}$$
$$= \frac{ig^4}{[(q_A-p_1)^2 - m_3^2]^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m_1^2)[(q_A-p_1+k)^2 - m_2^2]}$$

4. Quantenelektrodynamik (QED)

Entwicklung: 1946-51 Feynman, Schwinger, Tomonaga ; (Nobel 1965)

QED ist die am genauesten verifizierte Theorie der Physik!

magnetisches Moment des e^-

((in Einheiten des "Bohr'schen Magnetons" $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$))

$\frac{\mu_e}{\mu_B}$ = 1.00115965218073 (28) ⟸ experimentell gemessen [Harvard, 2008 s. arXiv: 0801.1134]

Unsicherheit der letzten beiden Ziffern

= 1.001159652183 (7) ⟸ theoretisch berechnet [s. arXiv: 0712.2607]

Relevanz: QED beschreibt (u.a.) WW'en von e^-, γ

→ alle Phänomene z.B. der Chemie folgen aus QED!

Formulierung der QED: $\boxed{\hat{\mathcal{L}}_I \equiv e\,\hat{\bar\psi}\gamma^\mu \hat A_\mu \hat\psi}$

↳ Elementarladung

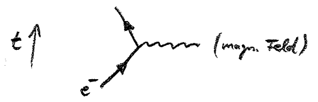
besser zu merken: Feinstrukturkonstante $\alpha_{EM} \overset{\text{nat.}}{\equiv} \frac{e^2}{4\pi} \overset{\text{SI}}{=} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137.035999...}$

⇒ Vertex :

⇒ $\delta\mathcal{M} = ie\gamma^\mu$

können nun Feynman-Diagramme der wichtigsten Prozesse malen:

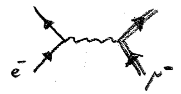
Prozess erster Ordnung



magnetisches Moment des e^-

$\mu_e/\mu_B = 1$

elastische Prozesse zweiter Ordnung



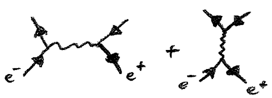
Elektron-Myon-Streuung : $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$

"Mott-Streuung" : $m_\mu \rightarrow \infty$

"Rutherford-Streuung" : $v_e \rightarrow 0$ (($e^- + p^+ \rightarrow e^- + p^+$))

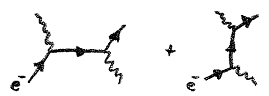
Elektron-Elektron-Streuung : $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$

"Møller-Streuung"



Elektron-Positron-Streuung : $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$

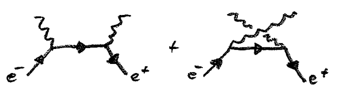
"Bhabha-Streuung"



Elektron-Photon-Streuung : $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$

"Compton-Streuung"

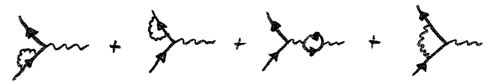
inelastische Prozesse zweiter Ordnung



Paarvernichtung: $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$

Paarerzeugung : $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$

wichtigster Prozess dritter Ordnung



"Strahlungskorrekturen"
zum magn. Moment des e^-
oder: "anomales" magn. Moment des e^-

((grobe Abschätzung der Größenordnung dieser Korrekturen:

2 neue Vertizes $\rightsquigarrow e^2$. jede "Schleife" gibt $\frac{1}{(4\pi)^2}$

$\rightarrow \frac{e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha_{EM}}{4\pi} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 137} \approx \frac{1}{1720}$?

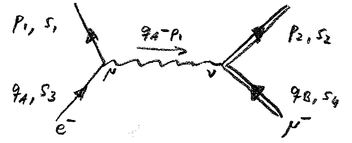
die genaue Antwort ist $\frac{\alpha_{EM}}{2\pi} \approx \frac{1}{861} \approx 0.0011617..$

vgl. mit (s.o.) $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1.0011596..$ (exp.) !))

etc ... Teilchenphysik als "Puzzlespiel" mit Feynmangraphen !

Nun können wir aber mit Hilfe der Feynman-Regeln (s. § 3.3) die Amplituden berechnen.

Bsp: Amplitude für e-μ-Streuung



zur Anwendung der Feynman-Regeln: jede Fermionlinie "rückwärts" verfolgen

$$\mathcal{M} = \underset{\substack{①\\ \text{ausl. } e^-}}{\bar{u}(\vec{p}_1, s_1)}\ \underset{\substack{②\\ \text{Vertex}}}{ie\gamma^\mu}\ \underset{\substack{①\\ \text{einl. } e^-}}{u(\vec{q}_A, s_3)}\ \underset{①}{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}\ \underset{②}{ie\gamma^\nu}\ \underset{①}{u(\vec{q}_B, s_4)}\ \underset{\substack{③\\ \text{Photon-}\\ \text{Propagator}}}{\frac{-ig_{\mu\nu}}{(q_A - p_1)^2}}\ \underset{\substack{⑦\\ \text{Gesamtphase}}}{(+i)}$$

$$= -\frac{e^2}{(q_A - p_1)^2}\ \bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A, s_3)\ \bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B, s_4)$$

Bem: • für gegebene $\vec{p}, \vec{q}, s_i$ ist dies eine Zahl !

- falls es mehrere Diagramme gleicher Ordnung gibt: Addition/Subtraktion (Regel ⑥), z.B.

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1 \pm \mathcal{M}_2|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 \pm (\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^*)$$

letzter Term: repräsentiert sog. Interferenz !

Behandlung der Spinabhängigkeit:

Annahme ($\hat{=}$ den meisten Experimenten): Spinorientierungen des Anfangszustandes seien zufällig verteilt, und im Endzustand wird die Spinorientierung der einzelnen Teilchen nicht gemessen.

$\rightarrow$ Mittelwert über alle Spinkonfigurationen im Anfangszustand
Summe $\nearrow$ Endzustand

$$\rightarrow |\mathcal{M}|^2 \rightarrow \langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{4} \sum_{s_1=\pm1} \sum_{s_2=\pm1} \sum_{s_3=\pm1} \sum_{s_4=\pm1} |\mathcal{M}|^2$$

in unserem Bsp ist

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(q_A - p_1)^4} \sum_{\mu\nu} \bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A, s_3) \underbrace{[\bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\gamma^\nu u(\vec{q}_A, s_3)]^*}\ \bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B, s_4) [\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\gamma_\nu u(\vec{q}_B, s_4)]^*$$

$=$ ein Skalar (keine Matrix; oder: 1x1-Matrix)

$= [\bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\gamma^\nu u(\vec{q}_A, s_3)]^+ = [u^+(\vec{p}_1, s_1)\gamma^0\gamma^\nu u(\vec{q}_A, s_3)]^+$

$= u^+(\vec{q}_A, s_3)\underbrace{\gamma^{\nu+}\gamma^{0+}}u(\vec{p}_1, s_1) = \bar{u}(\vec{q}_A, s_3)\gamma^\nu u(\vec{p}_1, s_1)$

$= \gamma^{\nu+}\gamma^0 = \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=\mathbb{1}}\gamma^{\nu+}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu$ (s. Übung, Aufgabe 106)

also mit Mittelwert und Summe:

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4(q_A - p_1)^4} \sum_{s_i=\pm1} \bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A, s_3)\ \bar{u}(\vec{q}_A, s_3)\gamma^\nu u(\vec{p}_1, s_1)\ *$$
$$* \ \bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B, s_4)\ \bar{u}(\vec{q}_B, s_4)\gamma_\nu u(\vec{p}_2, s_2)$$

Spinsumme? Vollständigkeitsrelation (s. S.21)! $\sum_s u(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s) = \not{p} + m\mathbb{1}$

außerdem gilt (für irgendeine 4x4-Matrix M)

$$\sum_s \bar{u}(\vec{p}, s) M u(\vec{p}, s) = \sum_s \bar{u}_\alpha(\vec{p}, s) M_{\alpha\beta} u_\beta(\vec{p}, s) = \sum_s M_{\alpha\beta} u_\beta(\vec{p}, s)\bar{u}_\alpha(\vec{p}, s)$$
$$= \sum_s Sp\left(M u(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s)\right) = Sp\left(M(\not{p} + m)\right)$$

also ist insgesamt

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4(q_A - p_1)^4} Sp\left[\gamma^\mu(\not{q}_A + m_e)\gamma^\nu(\not{p}_1 + m_e)\right] Sp\left[\gamma_\mu(\not{q}_B + m_\mu)\gamma_\nu(\not{p}_2 + m_\mu)\right]$$

Bem: • faktorisiert in e^-- und μ^--Anteil

- keine Spinoren mehr !
- brauchen jetzt Spuren über γ-Matrizen

Spuren über γ-Matrizen:

es gilt (s. Übungen, Aufgabe 25)

$$Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0$$

$$Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$$

((und, natürlich, $Sp(A+B) = Sp(A) + Sp(B)$; $Sp(cA) = c\,Sp(A)$;
$Sp(AB) = Sp(BA)$; für Matrizen A, B und Zahl c))

so daß für unser Bsp gilt

$$Sp[\gamma^\mu(\not q_A + m_e)\gamma^\nu(\not p_1 + m_e)] = (q_A)_\alpha (p_1)_\beta\, Sp[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] + \ldots \overset{0}{\cancel{Sp[(\gamma)^3]}} + m_e^2\, Sp[\gamma^\mu\gamma^\nu]$$

$$= 4(q_A)_\alpha (p_1)_\beta (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}) + 4m_e^2 g^{\mu\nu}$$

$$= 4(q_A^\mu p_1^\nu + q_A^\nu p_1^\mu + g^{\mu\nu}(m_e^2 - q_A p_1))$$

also insgesamt

$$\langle|M|^2\rangle = \frac{4e^4}{(q_A-p_1)^4}\Big\{[q_A\cdot q_B\; p_1\cdot p_2 + q_A\cdot p_2\; q_B\cdot p_1 + q_A\cdot p_1(m_\mu^2 - q_B\cdot p_2)]\cdot 2 + (m_e^2 - q_A\cdot p_1)(q_B\cdot p_2\cdot 2 + \underbrace{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}}_{= g^\mu_\mu = Sp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 4}(m_\mu^2 - q_B\cdot p_2))\Big\}$$

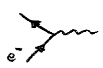
$$= \frac{8e^4}{(q_A-p_1)^4}\Big\{q_A\cdot q_B\; p_1\cdot p_2 + q_A\cdot p_2\; q_B\cdot p_1 - m_\mu^2\, q_A\cdot p_1 - m_e^2\, q_B\cdot p_2 + 2m_e^2 m_\mu^2\Big\}$$

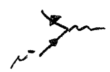
Bem:
- haben L-invariantes Resultat für $\langle|M|^2\rangle$ gefunden
- können dieses jetzt z.B. auf S.32 einsetzen
  $\rightarrow \frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega} = \ldots$
  (oder in den L-invarianten Ausdruck von Aufgabe 22!)
- für $m_\mu \gg m_e$ ((vgl. $m_\mu \approx 106$ MeV, $m_e \approx 0.511$ MeV)) folgt dann der Wirkungsquerschnitt für "Mott-Streuung" und daraus für $v_e \ll 1$ die "Rutherford-Formel"

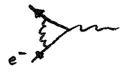
Einschub: mehr zum magnetischen Moment der Leptonen

(s. S. 36/37) ; magn. Moment der anderen Leptonen verschieden von μ_e?

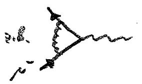
Masse $(e^-, \mu^-, \tau^-) \approx (0.511, 105.7, 1780)$ MeV

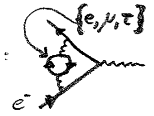
1. Ordnung:  $\Rightarrow \mu_e = \frac{e}{2m_e} \equiv \mu_B$, $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1$ (in 1. Ordn.)

also  $\Rightarrow \mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu}$,  $\Rightarrow \mu_\tau = \frac{e}{2m_\tau}$

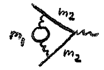
3. Ordnung: wichtigstes Diagramm  $\Rightarrow$ Korrektur $\frac{\delta\mu_e^{(1)}}{\mu_B} = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi}$

((diese Korrektur kommt vom Schleifenintegral (vgl. Regel ⑤), in dessen Integrand die Propagatoren (vgl. Regel ③) stehen. Propagatoren enthalten Massen (hier: m_e), da als Korrektur (zu $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1$) aber dim.-lose Zahl herauskommen muss, kann das Ergebnis nicht von m_e abhängen $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha_{EM}}{\pi}$))

also z.B.  $\Rightarrow$ Korrektur $\frac{\delta\mu_\mu^{(1)}}{e/2m_\mu} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi} = \frac{\delta\mu_\tau^{(1)}}{e/2m_\tau}$!

5. Ordnung: wichtigstes Diagramm:  $\Rightarrow \frac{\delta\mu_e^{(2)}}{\mu_B} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \sum\limits_{i\in\{e,\mu,\tau\}} a\left(\frac{m_i}{m_e}\right)$

((wobei die Korrektur vom Zwei-Schleifenintegral kommt:

 $\sim a\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ ← muß wieder Zahl sein, kann also nur vom Verhältnis der Massen abhängen

dieses Integral ist berechnet [Li/Mendel/Samuel, PRD 47 (1993) 1723],

wobei z.B. $a(1) = \frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} \approx 0.016$

$a(\varepsilon) = -\frac{1}{3}\ln(\varepsilon) - \frac{25}{36} + O(\varepsilon)$; $a\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \approx a\left(\frac{1}{207}\right) \approx 1.08$

$a\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon^2}{45} + O(\varepsilon^4)$; $a\left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right) \approx a(17) \approx 7.7\cdot 10^{-5}$))

(Fazit: Schleife mit dem leichtesten Teilchen, hier: e^-, gibt den größten Beitrag) also

$$\frac{\delta\mu_e^{(2)}}{e/2m_e} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2\left[a(1) + a(207) + a(3483)\right] \approx 0.016 + 5.2\cdot 10^{-7} + 1.8\cdot 10^{-9}$$

$$\frac{\delta\mu_\mu^{(2)}}{e/2m_\mu} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2\left[a\left(\frac{1}{207}\right) + a(1) + a(17)\right] \approx 1.08 + 0.016 + 7.7\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\delta\mu_\tau^{(2)}}{e/2m_\tau} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2\left[a\left(\frac{1}{3483}\right) + a\left(\frac{1}{17}\right) + a(1)\right] \approx 2.02 + 0.25 + 0.016$$

Anwendung: Mott- und Rutherford-Formel

$m_\mu \approx 106$ MeV $\gg$ $m_e \approx 0.511$ MeV

→ betrachte den Grenzwert $m_\mu \to \infty$

((CMS ≈ Laborsystem; das Myon ruht, Rückstoß vernachlässigbar))

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1) \quad , \quad p_2 = (E_2, -\vec{p}_1) = m_\mu \left(\sqrt{1 + \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{m_\mu^2}}, -\frac{\vec{p}_1}{m_\mu} \right) \approx (m_\mu, \vec{0})$$

$$q_A = (E_A, \vec{q}_A), \quad q_B = (E_B, -\vec{q}_A) = m_\mu \left(\sqrt{1 + \frac{\vec{q}_A^{\,2}}{m_\mu^2}}, -\frac{\vec{q}_A}{m_\mu} \right) \approx (m_\mu, \vec{0})$$

E-Erhaltung: $E_A + m_\mu + O(\frac{1}{m_\mu}) \overset{!}{=} E_1 + m_\mu + O(\frac{1}{m_\mu}) \Rightarrow \vec{q}_A^{\,2} = \vec{p}_1^{\,2}$

nach Ausführen der Phasenraumintegration hatten wir (s. S. 32)

erhalten: $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \underbrace{\frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{q}_A|}}_{=1 \text{ wegen E-Erhaltung}} \frac{|M|^2}{(E_A + E_B)^2}$$

nun das Ergebnis für $\langle |M|^2 \rangle$ von S.39 einsetzen

hier: $(q_A - p_1)^2 = \overset{0}{(E_A - E_1)^2} - (\vec{q}_A - \vec{p}_1)^2 = -2\vec{q}_A^{\,2}(1 - \cos\theta) = -4\vec{q}_A^{\,2} \sin^2\frac{\theta}{2}$

$q_A \cdot q_B = p_1 \cdot p_2 = q_A \cdot p_2 = q_B \cdot p_1 = m_\mu E_A$

$q_A \cdot p_1 = E_A E_1 - \vec{q}_A \vec{p}_1 = m_e^2 + \vec{q}_A^{\,2} - \vec{q}_A^{\,2} \cos\theta = m_e^2 + 2\vec{q}_A^{\,2} \sin^2\frac{\theta}{2}$

$q_B \cdot p_2 = m_\mu^2$

$E_A + E_B = m_\mu \left(\frac{\sqrt{m_e^2 + \vec{q}_A^{\,2}}}{m_\mu} + 1 \right) \approx m_\mu + O(\frac{1}{m_\mu})$

s. auch Ü29

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{m_\mu^2} \frac{8e^4}{(-4\vec{q}_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2})^2} \left(2m_e^2 m_\mu^2 + 2m_\mu^2 \vec{q}_A^{\,2} \cos^2\frac{\theta}{2} \right)$$

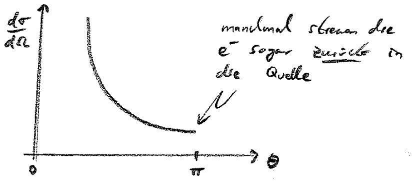
$$= \left(\frac{\alpha_{EM}}{2\vec{q}_A^{\,2} \sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^2 \left(m_e^2 + \vec{q}_A^{\,2} \cos^2\frac{\theta}{2} \right)$$ "Mott-Formel"

Bem: • ist gute Näherung für e-p-Streuung, da $m_p \approx 938$ MeV $\gg m_e$

falls das Elektron nichtrelativistisch ist (also $|\vec{q}_A| = m_e v \ll m_e$),

ergibt sich die "Rutherford-Formel":

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{2 m v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^2$$



manchmal streuen die e⁻ sogar zurück in die Quelle

5. Starke Wechselwirkungen, Quantenchromodynamik (QCD)

Im letzten Kapitel: QED, Theorie der elektromagnetischen Ww'en.
konvergiert sehr gut ($\alpha_{EM} \approx \frac{1}{137}$)
experimentell extrem genau verifiziert (z.B. μ_e)
→ "langweilig"

jetzt: komplexere Ww'en
viele verschiedene Näherungsmethoden, neue Begriffe
→ "interessant"

Behandlung hier jedoch nur qualitativ.

QED ≙ Ww geladener T.; Vermittlung: Photonen; Stärke: $g_e = \sqrt{4\pi\alpha_{EM}}$ ← Einheitsladung: e (Positron)

QCD ≙ Ww farbiger T.; Vermittlung: Gluonen; Stärke: $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$ ← Farb-Einheitsladung

Quarkmodell

historisch: 1959-64; Gell-Mann, Ne'eman, Zweig
siehe [O.W. Greenberg, Am. J. Phys. 50 (1982) 1074]

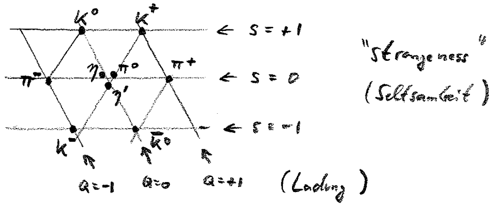
leichte Quarks: u ($m \approx 2$ MeV), d (≈ 5 MeV), s (≈ 100 MeV)

schwere Quarks: c ($m \approx 1.25$ GeV), b (≈ 4.2 GeV), t (≈ 174 GeV)

durch Beobachtung der leichtesten Hadronen (Mesonen mit Spin $J = 0, 1, ..$ bzw Baryonen mit Spin $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ..$) kann man etwas über die leichten Quarks erfahren!

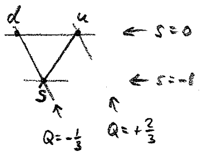
Klassifizierung durch Gell-Mann ("der Mendelejew der Teilchenphysik")

J=0-Mesonen:
"der achtfache Weg"
((η' schwerer als andere 8))

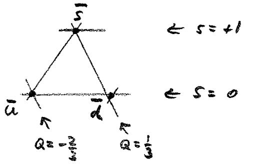


Systematik: Meson = Quark + Antiquark

q_i:



$\bar{q}_i$:



alle Kombinationen $\Rightarrow$ $3 \cdot 3 = 9$ Mesonen !

[Gruppentheorie: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, $1 \equiv \eta'$]

funktioniert nicht nur für Spin-0 ($\uparrow\downarrow$, s.o.)

sondern auch für Spin-1 Mesonen ($\uparrow\uparrow$), Spin-$\frac{1}{2}$ Baryonen ($\uparrow\uparrow\downarrow$),

Spin-$\frac{3}{2}$ Baryonen ($\uparrow\uparrow\uparrow$)

Bestätigung des Quarkmodells: experimentell!

es "fehlte" eine Ecke im Baryondekuplett (das Ω^-, sss).

1964 experimentell entdeckt.

((vgl. Mendelejew: es "fehlten" Gallium, Scandium, Germanium in seinem Periodensystem → Vorhersage !))

Fragen
- warum sieht man keine freien Quarks?
- steht z.B. sss nicht im Widerspruch zum Pauli-Prinzip?

→ neue Eigenschaft: Farbe.

Quarks haben drei Farben / Antifarben ((nehmen wir $\overset{\text{rot/grün/blau}}{r, g, b} / \bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$))

als freie Teilchen treten nur farblose Kombinationen auf

dies ist Hypothese! braucht wieder experimentelle Bestätigung.

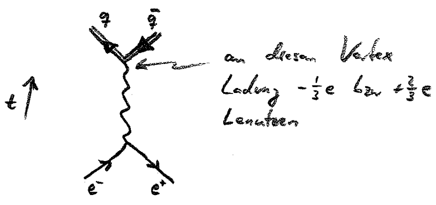
→ studiere innere Struktur der Hadronen.

Hadronerzeugung in e^+e^--Kollisionen

Quarks sind (el.) geladen (s.o.)

→ spüren em. WW, $\hat{=}$ QED

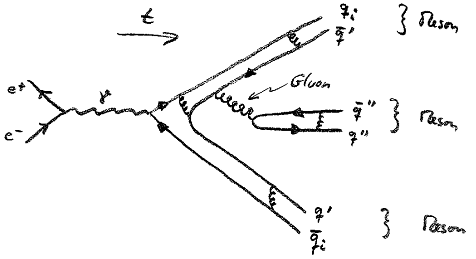
Idee: $e^+e^- \to \gamma \to q\bar{q}$



---

genauer:

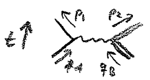
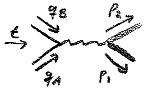
[z.B. SLAC, LEP]



können die erste Stufe dieses Prozesses mit den QED-Regeln aus Kapitel 4 berechnen, analog zu "$e^+ + e^- \to \gamma \to \mu^+ + \mu^-$":

wähle CMS, $E \equiv$ Energie des einl. e^-

$Q_i \equiv$ Ladung des q_i (in Einheiten von e), $m_i \equiv$ Masse des q_i

((S.37-39: $t\uparrow$  , jetzt: $\xrightarrow{t}$  , also $p_1 \leftrightarrow -q_B$))

$$\Rightarrow \langle |M|^2 \rangle \overset{(S.39)}{=} \sum_{\substack{\text{Farben}\\ \text{Flavors } i}} \frac{8 Q_i^2 e^4}{(q_A + q_B)^4} \left\{ q_A p_1 \, q_B p_2 + q_A p_2 \, p_1 q_B + m_i^2 q_A q_B + m_e^2 p_1 p_2 + 2 m_e^2 m_i^2 \right\}$$

CMS: $\vec{q}_B = -\vec{q}_A$, $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$

E-Erhaltung: $2E = E_1 + E_2 = 2E_1 \Rightarrow E_A = E_B = E_1 = E_2 = E$

$\vec{q}_A^{\,2} + m_e^2 = \vec{p}_1^{\,2} + m_i^2$

$$= \sum \frac{8 Q_i^2 e^4}{(2E)^4} \left\{ (E^2 - \vec{q}_A \vec{p}_1)^2 + (E^2 + \vec{q}_A \vec{p}_1)^2 + m_i^2 (E^2 + \vec{q}_A^{\,2}) + m_e^2 (E^2 + \vec{p}_1^{\,2}) + 2 m_e^2 m_i^2 \right\}$$

$$= \sum \frac{Q_i^2 e^4}{E^4} \left\{ E^4 + m_e^2 E^2 + m_i^2 E^2 + (E^2 - m_e^2)(E^2 - m_i^2) \cos^2\theta \right\}$$

$\hookleftarrow \sphericalangle \vec{q}_A, \vec{p}_1$

also folgt insgesamt für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta}_{= \int_{-1}^{1} du, \ u = \cos\theta} \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{\sqrt{E^2 - m_i^2}}{\sqrt{E^2 - m_e^2}} \frac{\langle |M|^2 \rangle}{(2E)^2} \Theta(E - m_i)$$

$$= \sum_{\substack{\text{Farben}\\ \text{Flavors } i}} \frac{\pi}{3} \frac{Q_i^2 \alpha_{em}^2}{E^2} \frac{\sqrt{1 - m_i^2/E^2}}{\sqrt{1 - m_e^2/E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_e^2}{E^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E^2} \right) \Theta(E - m_i)$$

$$\approx N_c \cdot \sum_i Q_i^2 \cdot \frac{\pi}{3} \left(\frac{\alpha_{em}}{E} \right)^2 \qquad \text{für } E \gg m_i \gg m_e$$

$\hookrightarrow N_c \equiv \sum_{\text{Farben}}$

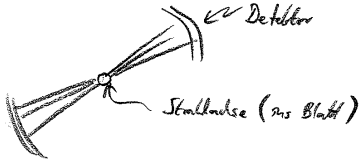
Bem.:

- Schwellenenergie (θ-Fkt): Prozess für $E < m_{quark}$ verboten; brauchen genug Energie, um $q\bar{q}$-Paar zu erzeugen!
- für große Strahlenergien ist die Näherung der letzten Zeile sehr gut: $\sqrt{1-m_i^2/E^2}\left(1+\frac{m_i^2}{2E^2}\right) \approx 1 - \frac{3}{8}\frac{m_i^4}{E^4} + \dots$!

  (eher zufällig)

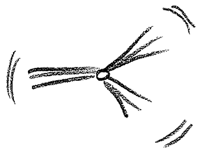
  ((Korrektur zu m_e ist $O(m_e^2/E^2)$, aber $m_e^2 \ll m_{quark}^2$))
- es werden tatsächlich Prozesse beobachtet, die dem oben skizzierten Modell entsprechen:

"2-Jet-Ereignis"



$e^+e^- \to q\bar{q} \to$ Hadronisierung

"3-Jet-Ereignis"



$e^+e^- \to q\bar{q}G \to$ Hadronisierung

expt. Beweis für Existenz der Gluonen!

- die Anzahl der Farben ist als $N_c = 3$ gemessen:

$$R(E) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \approx N_c \cdot \sum_i Q_i^2\, \theta(E - m_i)$$

$\rightarrow$ erwarten bei niedrigen Energien (u,d,s-Quarks tragen bei)

$$R \approx N_c\left[\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2\right] = \tfrac{2}{3} N_c$$

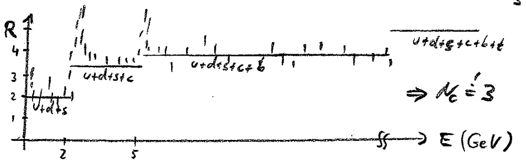
$\rightarrow$ zwischen c- und b-Schwelle $R \approx \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] N_c = \frac{10}{9} N_c$

$\rightarrow$ über b-Schwelle $R \approx \left[\frac{10}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] N_c = \frac{11}{9} N_c$

$\rightarrow$ über t-Schwelle $R \approx \left[\frac{11}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] N_c = \frac{5}{3} N_c$

siehe z.B. [hep-ph/0312114] oder auch [pdg.lbl.gov/2010/hadronic-xsections/]

Exp.:



$\Rightarrow N_c \overset{!}{=} 3$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{die Quark- und Farb-Hypothesen scheinen richtig zu sein!}}$

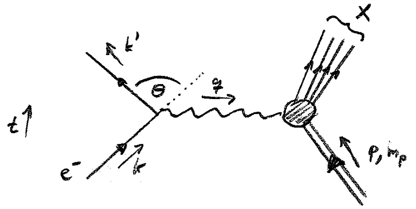
Tiefinelastische e^-p^+-Streuung

wie z.B. bei HERA / DESY, 1992-2007

$\rightarrow$ präzise Untersuchung der inneren Struktur des Protons, und damit der Eigenschaften von Quarks + Gluonen.

Grundidee: Rutherford-Streuung $\Rightarrow$ Zahl der unter großen Winkeln abgelenkten Teilchen deutet auf Atomstruktur hin (Kern).

Tiefinelastische Streuung $\Rightarrow$ Zahl der unter großen Winkeln abgelenkten Teilchen deutet auf Protonstruktur hin (Qu. + Gl.)



e^- mit hoher Energie

$\rightarrow$ inelastischer Prozess

$e^- + p^+ \to e^- + X$

$k = (E, \vec{k})$, $k' = (E', \vec{k}')$

"inklusiver" Prozess: nur auslaufendes e^- wird registriert.

$X \hat{=}$ "hadronische Splitter" des Protons

wenn p, k bekannt sind, und alles über X unbekannt ist, gibt es zwei unabhängige Variablen: E', θ

$$\Rightarrow k' = \left(E', \sqrt{(E')^2 - m_e^2}\; \vec{e}_{k'}\right)$$

((vgl. mit elastischer Streuung $e + p \to e + p$:

wegen E-p-Erhaltung gilt dann $p'^2 = (k + p - k')^2 \overset{!}{=} m_p^2$

$\rightarrow$ nur eine unabh. Variable, z.B. θ))

üblicherweise wählt man $Q_E^2 \equiv -q^2$, $x \equiv \frac{Q_E^2}{2q\cdot p}$ ("Bjorken x")

Zusammenhang $(Q_E^2, x) \leftrightarrow (E', \theta)$: s. Übung, Aufgabe 32 für $E \gg m_e$ parametrisiert man den Wirkungsquerschnitt als

$$\frac{d\sigma}{dE'\,d\Omega} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{2E\sin^2(\frac{\theta}{2})}\right)^2 \left\{ 2\,W_1(Q_E^2,x)\sin^2(\tfrac{\theta}{2}) + W_2(Q_E^2,x)\cos^2(\tfrac{\theta}{2}) \right\}$$

Strukturfunktionen des Protons
enthalten Eigenschaften des Protons
experimentell gut bekannt

((vgl. Mott-Formel, S. 41; elastische Streuung,

falls $E \gg m_e \Rightarrow |\vec{q}_1| = E \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{2E\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 \left\{ \cos^2\frac{\theta}{2} \right\}$

hier also E' nicht unabhängig von E, θ))

aber wie berechnet man die Strukturfkt'n ? → Partonmodell

Partonmodell [Bjorken, Callan, Gross 1967-69]

Bjorken hat ein Skalenverhalten vorhergesagt: bei großen Impulsüberträgen $Q_E^2 \gtrsim (1\,\mathrm{GeV})^2$ sollte alles nur von einer Variablen abhängen:

$$m_p W_1(Q_E^2, x) \rightarrow F_1(x)$$
$$\frac{Q_E^2}{2m_p x} W_2(Q_E^2, x) \rightarrow F_2(x)$$

Callan und Gross haben vorhergesagt, dass für nicht zu kleines x gilt

$$2x\,F_1(x) = F_2(x)$$

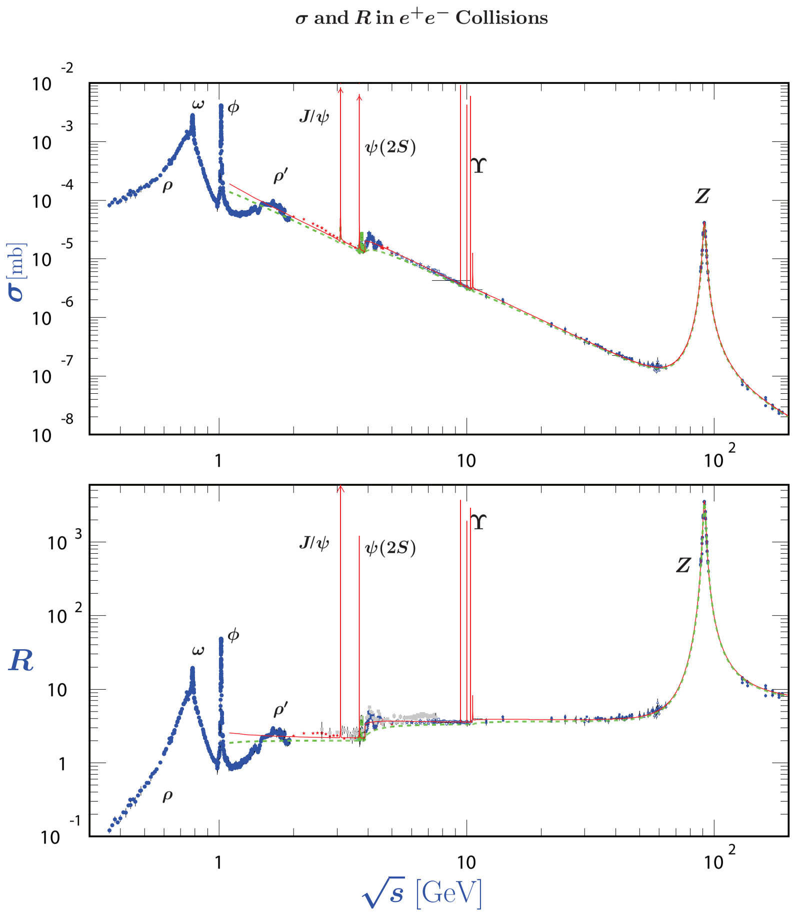
⇒ statt 2 Fkt von 2 Variablen nur 1 Fkt von 1 Variable!

also muss das System eine spezielle Struktur haben, die es so dramatisch vom allgemeinen Fall abweichen lässt!

dieses Verhalten wurde kurz darauf am SLAC experimentell bestätigt.

was ist diese spezielle Struktur des Protons?

→ "Partonmodell". ((es geht eigentlich um Quarks + Gluonen, aber damals hatten sich diese Begriffe noch nicht durchgesetzt, wegen der auf S. 43 angesprochenen Probleme des Quarkmodells))



σ and R in e⁺e⁻ Collisions

Figure 41.6: World data on the total cross section of $e^+e^- \to hadrons$ and the ratio $R(s) = \sigma(e^+e^- \to hadrons, s)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-, s)$. $\sigma(e^+e^- \to hadrons, s)$ is the experimental cross section corrected for initial state radiation and electron-positron vertex loops, $\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-, s) = 4\pi\alpha^2(s)/3s$. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are an educative guide: the broken one (green) is a naive quark-parton model prediction, and the solid one (red) is 3-loop pQCD prediction (see "Quantum Chromodynamics" section of this *Review*, Eq. (9.7) or, for more details, K. G. Chetyrkin *et al.*, Nucl. Phys. **B586**, 56 (2000) (Erratum *ibid.* **B634**, 413 (2002)). Breit-Wigner parameterizations of J/ψ, $\psi(2S)$, and $\Upsilon(nS), n = 1,2,3,4$ are also shown. The full list of references to the original data and the details of the R ratio extraction from them can be found in [`arXiv:hep-ph/0312114`]. Corresponding computer-readable data files are available at `http://pdg.lbl.gov/current/xsect/`. (Courtesy of the COMPAS (Protvino) and HEPDATA (Durham) Groups, May 2010.) See full-color version on color pages at end of book.

R in Light-Flavor, Charm, and Beauty Threshold Regions

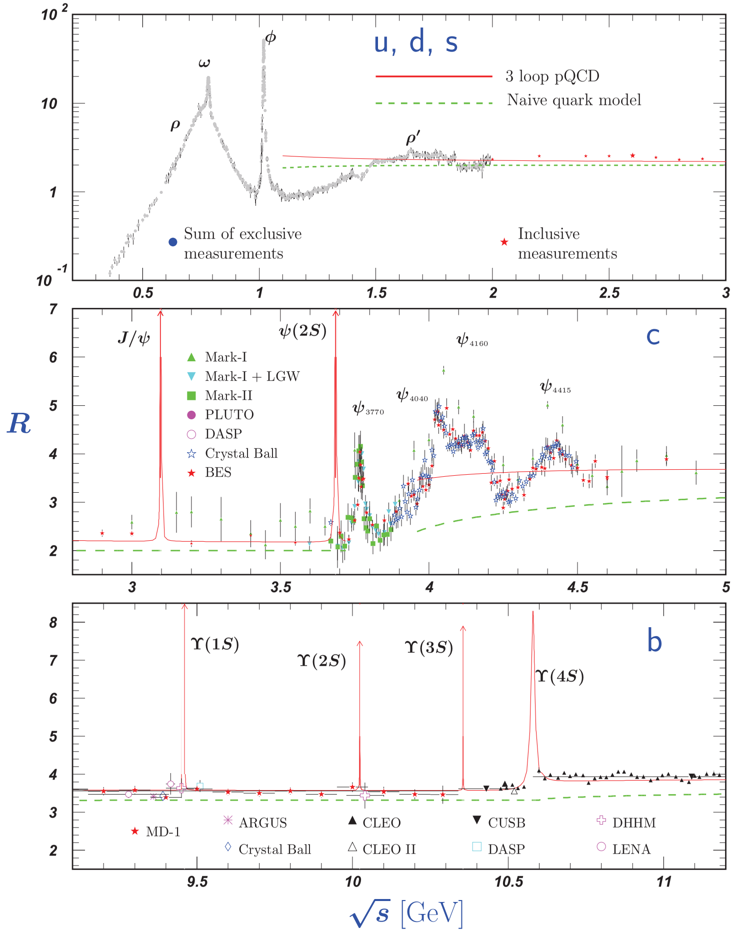
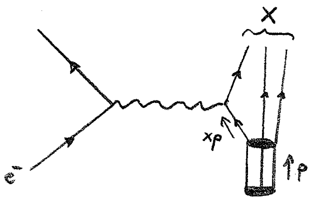


Figure 41.7: R in the light-flavor, charm, and beauty threshold regions. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are the same as in Fig. 41.6. **Note:** CLEO data above $\Upsilon(4S)$ were not fully corrected for radiative effects, and we retain them on the plot only for illustrative purposes with a normalization factor of 0.8. The full list of references to the original data and the details of the R ratio extraction from them can be found in `[arXiv:hep-ph/0312114]`. The computer-readable data are available at `http://pdg.lbl.gov/current/xsect/`. (Courtesy of the COMPAS (Protvino) and HEPDATA (Durham) Groups, May 2010.) See full-color version on color pages at end of book.

Grundidee: mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (bestimmt durch eine "Verteilungsfunktion") löst sich ein Parton (Quark, Gluon) vom Proton, und streut dann elastisch am virtuellen Photon.



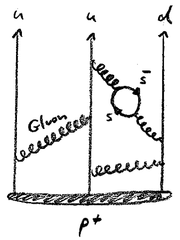
→ es kann bewiesen werden, dass aus dieser Grundidee (plus unseren Resultaten für eμ-Streuung) sowohl das Bjorken-Skalenverhalten als auch die Callan-Gross-Beziehung folgt, mit

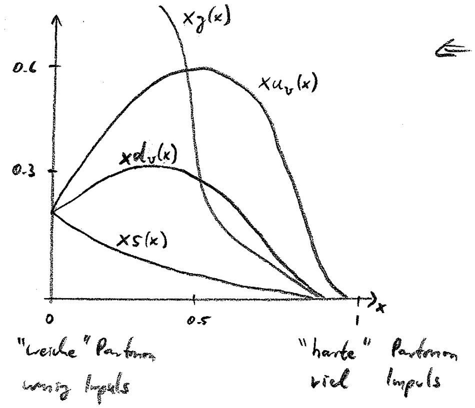
$$F_2(x) = x \sum_i Q_i^2 f_i(x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$ [s. Übung, Aufgabe 32(b)]

Partonverteilungsfunktionen / Wahrscheinlichkeitsdichten

aus welchen Partonen besteht das Proton?

- "Valenz"-Quarks, s. Quarkmodell.
  Verteilungsfkt'n: $u_v(x)$, $d_v(x)$
- "See"-Quarks, virtuelle $q\bar{q}$-Paare
  → $s(x)$, $\bar{s}(x)$
- Gluonen: $g(x)$
  diese haben keine elektrische Ladung, koppeln also nicht an das Photon, tragen also nicht zu $F_2(x)$ bei!
  tragen jedoch Teil des Proton-Gesamtimpulses $p = \int_0^1 dx \sum_i f_i(x)\, xp$
  ((mehr solcher Summenregeln: Aufg. 33))





⇐ experimentell gemessene Partonverteilungsfunktionen

Quantenchromodynamik (QCD)

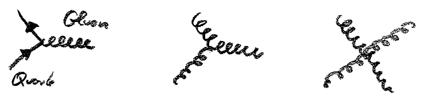
→ Stoff einer ganzen Vorlesung! [→ YS, SS 2011]

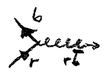
hier: nur Struktur / Schlagwörter / Highlights

historisch: Nambu; Gell-Mann; Fritzsch;
Gross, Wilczek, Politzer 1973 → Nobel 2004

QCD ≡ Theorie der starken Wechselwirkungen
≙ Modelle dieses Kapitels (Quarks, Farbe; Partonen)
+ mathematische Struktur (nichtabelsche Eichtheorie [Yang, Mills 1954])

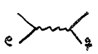
analog zur QED: spezifiziere QCD durch Feynmanregeln

Vertizes: 

Bem.:
- Gluon koppelt an Farbladung
  Quarkfarbe ändert sich typischerweise am qqg-Vertex
  z.B. , Gluon trägt Differenz
- Gluon wechselwirkt daher mit sich selbst
  (im Gegensatz zum el. neutralen Photon)
- QCD hat sehr wenige Parameter:
  "Eichinvarianz" erfordert $\succ \sim g_s$, $\times \sim g_s^2$
- analog zu α_{em}: def. $\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$
  hier ist $\alpha_s \gtrsim \frac{1}{10}$ "groß"
- daher funktioniert Störungstheorie i.A. nicht so perfekt wie in der QED.
  → Theorie ist "interessanter", vielseitiger, es gibt einige unerwartete Konsequenzen (s.u.)
- Berechnungen selten präziser als ~ 1%

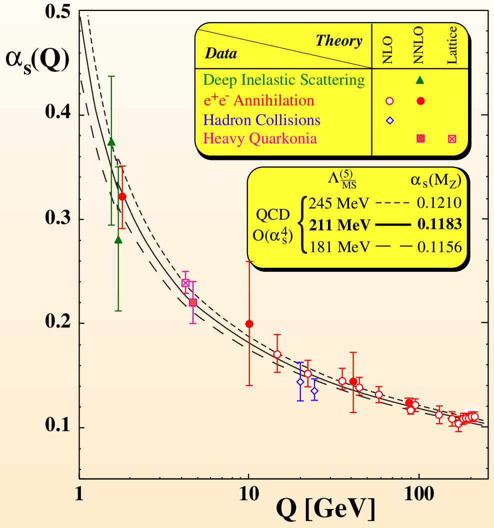
- eine wichtige Lösungsmethode ist (numerische) Gitter-QCD
- Störungstheorie möglich z.B. für Systeme schwerer Quarks

QCD-Highlights:

- Asymptotische Freiheit:
  Kopplungsstärke g_s ist keine Konstante, sondern hängt von Impulsskala ab, $g_s(Q_E)$ [s. Übung, Aufgaben 30, 31]
  in tiefinel. Streuung z.B. und $g_s \searrow$ wenn $Q_E^2 \nearrow$,
  und sogar $\lim_{Q_E^2 \to \infty} g_s = 0$.
  ⇒ erklärt Bjorken-Skalenverhalten: für großes Q_E^2 sind die Partonen tatsächlich freie Teilchen! 
  Endliches Q_E^2 → Korrekturen: Partonverteilungsfkt.! $f_i(x) \to f_i(Q_E^2, x)$
   etc
- Quarkeinschluss
  $g_s \nearrow$ für $Q_E^2 \searrow$: WW'en sind stark ⇒ eng gebundene Zustände (Hadronen)
- "chirale Symmetriebrechung"
  ((Begriffsklärung: später))
  Konsequenz: Massen der leichten Hadronen sind nicht wie vom Quarkmodell suggeriert (z.B. $m_{\pi^+} \approx m_u + m_d$),
  sondern $m_{\pi^+} \approx \sqrt{2 GeV \cdot (m_u + m_d)}$
- [→ s. auch 3 Sonderblätter]

Quantenchromodynamik (QCD)

„Zoom" in einen Teil des Eich-Systems: QCD (die $SU(3)$; qu+gl)



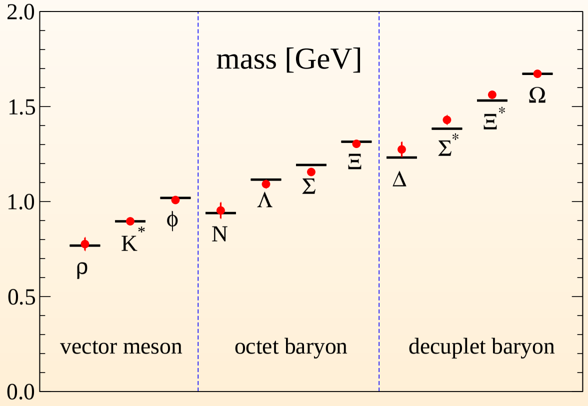
[PDG; LEP EWWG]

- Merkmal: asymptotische Freiheit
- Atomstöße $\longrightarrow e^-$ emittiert
  Grundlage unserer Elektronik
- Protonstöße $\longrightarrow$ erzeugen mehr p's
  + exotische Teilchen; nie ein Quark!
- starke Kraft wächst mit Entfernung
- Quarks nahe beisammen (hohe E)
  ⇒ Kraft schwächer
- unerwartet! (em. Kraft umgekehrt)
- schönes Theorie-Resultat
  Nobelpreis 2004 G/P/W
- Experiment?! (← siehe links)

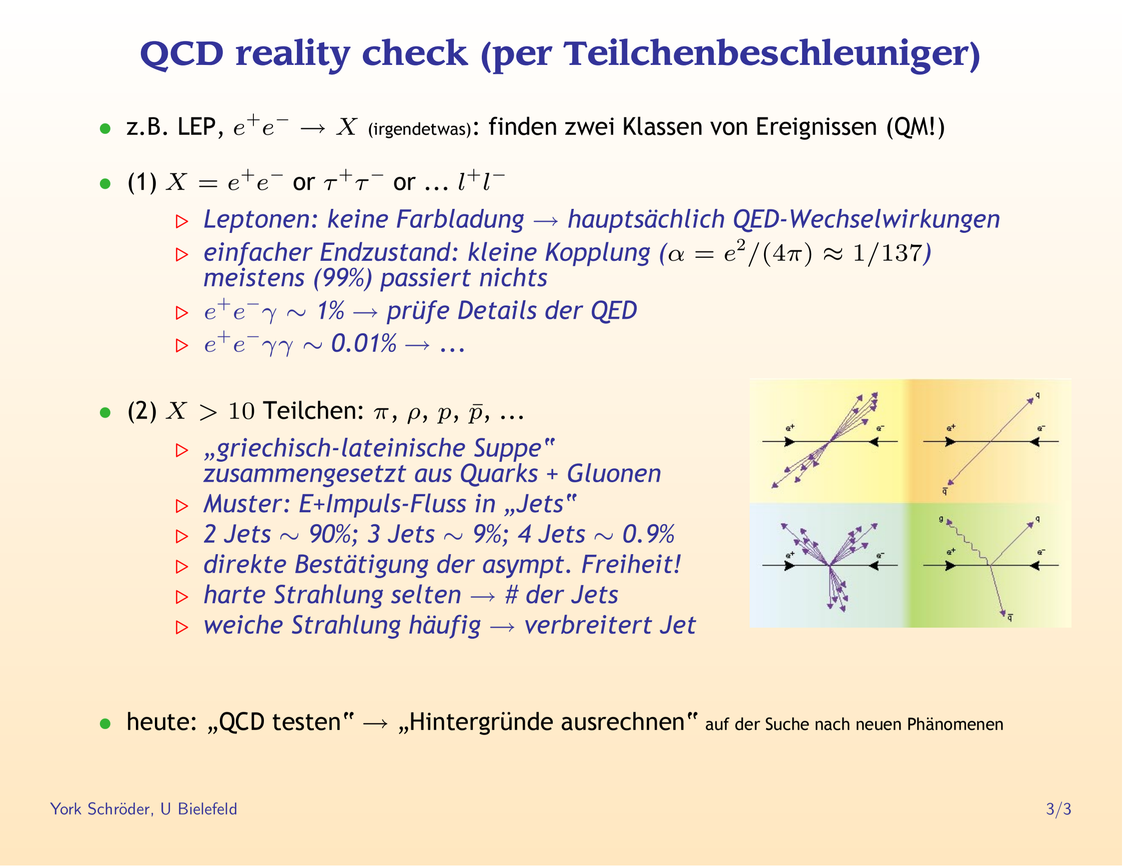
QCD reality check (per Computer)

studiere das Hadronen-Spektrum (Hadronen: Bindungszust. von Quarks; z.B. K=$s\bar{d}$, p=uud, Λ=uds)

- löse QCD-Gln per Computer
  [e.g. S. Aoki et.al., PACS-CS 2008]
- was nicht herauskommt:
  - ▷ *Gluonen*
  - ▷ *Drittel-Ladungen*
- was man erhält:
  - ▷ *nur die beobachteten Teilchen + Massen*
  - ▷ *nicht mehr, nicht weniger!*



- punchline: QCD erklärt die niedrigliegenden Hadronmassen!
  - ▷ *Feld in Entwicklung; Teraflop-Geschwindigkeiten, weltweite Anstrengungen*
  - ▷ $a = 0.091$ *fm;* $32^3 \times 64$ *Gitter; NP* $\mathcal{O}(a)$ *verb. Wilson Quarks*
  - ▷ *2+1 flavors; chirale Logs;* $m_q \approx 1.3\, m_l$; π, K, Ω *als Input*



QCD reality check (per Teilchenbeschleuniger)

- z.B. LEP, $e^+e^- \to X$ (irgendetwas): finden zwei Klassen von Ereignissen (QM!)
- (1) $X = e^+e^-$ or $\tau^+\tau^-$ or … l^+l^-
  - ▷ *Leptonen: keine Farbladung → hauptsächlich QED-Wechselwirkungen*
  - ▷ *einfacher Endzustand: kleine Kopplung ($\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$) meistens (99%) passiert nichts*
  - ▷ *$e^+e^-\gamma \sim$ 1% → prüfe Details der QED*
  - ▷ *$e^+e^-\gamma\gamma \sim$ 0.01% → …*
- (2) $X > 10$ Teilchen: π, ρ, p, $\bar{p}$, …
  - ▷ *„griechisch-lateinische Suppe“ zusammengesetzt aus Quarks + Gluonen*
  - ▷ *Muster: E+Impuls-Fluss in „Jets“*
  - ▷ *2 Jets ∼ 90%; 3 Jets ∼ 9%; 4 Jets ∼ 0.9%*
  - ▷ *direkte Bestätigung der asympt. Freiheit!*
  - ▷ *harte Strahlung selten → # der Jets*
  - ▷ *weiche Strahlung häufig → verbreitert Jet*
- heute: „QCD testen“ → „Hintergründe ausrechnen“ auf der Suche nach neuen Phänomenen

---

6. Schwache Wechselwirkungen

QED (em. WW), QCD (starke WW): haben vollständige Theorie.

schwache WW: (noch) keine komplette Theorie

→ hier: Behandlung der bekannten "Bausteine" der richtigen Theorie.

Relevanz: z.B. Beta-Zerfälle von μ, n, $\pi^\pm$

Austauschteilchen: "intermediäre Vektorbosonen" $W^\pm$, $m_W \approx 80.4$ GeV
Z^0, $m_Z \approx 91.2$ GeV

schwache WW führt zu vielen Prozessen/Zerfällen, die laut QED/QCD nicht stattfinden sollten ⇒ verschiedene Theorien haben verschiedene Symmetrien und Erhaltungssätze !

tiefer Zusammenhang: Noether-Theorem

$$\boxed{\text{Symmetrien der Lagrangedichte} \Leftrightarrow \text{Erhaltungssätze}}$$

z.B.: Invarianz unter (räuml. + zeitl.) Translationen ⟺ Energie-Impuls-Erhaltung

Bsp Leptonzahlerhaltung in der QED

$$\hat{\mathcal{L}}_I = e\,\hat{\bar\psi}\gamma^\mu \hat{A}_\mu \hat\psi \qquad \text{(vgl. Skript, S. 36)}$$

hat die folgende Invarianz (Symmetrie):

$$\hat\psi \to \hat\psi' = e^{i\alpha}\hat\psi \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\hat{\bar\psi} \to \hat{\bar\psi}' = e^{-i\alpha}\hat{\bar\psi}$$
$$\hat{A}_\mu \to \hat{A}_\mu' = \hat{A}_\mu$$
$$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}}_I \to \hat{\mathcal{L}}_I' = \hat{\mathcal{L}}_I \quad ! \quad (\forall \alpha)$$

Die Symmetrie funktioniert, weil es an jedem Vertex zwei Fermionen gibt, $\hat{\bar\psi}$, $\hat\psi$, bzw. 

⇒ Anzahl der Fermionen bleibt erhalten.

in der QCD gilt es viele solcher Symmetrien. z.B.:

Seltsamkeit ist eine "kontinuierliche innere Symmetrie"

$\mathcal{L}_{QCD}$ ist invariant unter $\hat{s} \to e^{i\alpha}\hat{s}$, $\hat{\bar{s}} \to e^{-i\alpha}\hat{\bar{s}}$.

$\Rightarrow$ deshalb bleibt die Seltsamkeit erhalten.

d.h. Mesonen wie $K^+ = u\bar{s}$, $K^- = s\bar{u}$ können in QCD nicht zerfallen!

((dasselbe gilt auch für "Charmness" etc. aber $c\bar{c}$ kann natürlich zerfallen.))

Isospin

analog zur Seltsamkeit könnte man auch "Upness" und "Downness" definieren.

Diese wären wieder exakte Symmetrien der QCD.

Falls man elektromagnetische Effekte sowie die Massendifferenz der u- und d-Quarks vernachlässigen kann, gibt es eine größere Symmetrie,

die sog. Isospin-Symmetrie: $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$

$\qquad R$ ↳ Matrix

Damit $\hat{\mathcal{L}}_Z$ invariant ist, muß R unitär sein: $R^+R = \mathbb{1}$,

sowie $\det R = +1$.

Man sagt: "die Symmetriegruppe ist die Flavor-SU(2)"

Konsequenzen:

- Isospin-Transformationen vertauschen mit Hamilton-Op.
  - → diese Op's haben gleichzeitige Eigenzustände
  - → Teilchen ($\hat{=}$ Eigenzustände des $\hat{H}$) können durch I, I_z klassifiziert werden (vgl. Drehungen: J, J_z)

z.B. $u \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle \equiv \bar{d}$

$d \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\rangle \equiv \bar{u}$

$u\bar{d}$ $\quad \pi^+ \equiv |1\ 1\rangle = |\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle$

$u\bar{u}+d\bar{d}$ $\quad \pi^0 \equiv |1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\rangle + |\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\rangle|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$d\bar{u}$ $\quad \pi^- \equiv |1\ {-1}\rangle = |\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\rangle|\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\rangle$

((remember: Addition von Drehimpulsen; Clebsch-Gordan-Koeff's:

s. QM; $|j\,m\rangle = \sum_{j_1 j_2} C^{j\,j_1\,j_2}_{m\,m_1\,m_2} |j_1\,m_1\rangle|j_2\,m_2\rangle$

bzw. $|j_1\,m_1\rangle|j_2\,m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{j\,j_1\,j_2}_{m\,m_1\,m_2} |j,\,m_1+m_2\rangle$))

- Zerfälle: Isospin bleibt erhalten
- Streuung: Amplitude bestimmt durch I des Streuzustands (vgl. Übungen, Aufgabe 36)

Parität ist eine "diskrete Raumzeitsymmetrie"

Raum(spiegelung) $\overset{\text{inversion!}}{}$ $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda_P{}^\mu{}_\nu x^\nu$, $\Lambda_P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ ist

ein Teil der Lorentzgruppe (vgl. Skript S. 7).

Vermutung: diese Trafo vertauscht mit $\hat{H}$ $\Rightarrow$ kann physikalische Teilchen als Eigenzustände wählen. Für QED/QCD ist das der Fall.

Bezeichnung: Operator $\hat{P}$ überführt Teilchenzustände in raumgespiegelte Version.

wegen $\hat{P}^2 = \mathbb{1}$ hat $\hat{P}$ die Eigenwerte $P = \pm 1$.

falls ein Objekt unter L-Trafo invar. ist: "Skalar"

$\qquad$ ↘ $\qquad$ wie x^μ transformiert: "Vektor"

mit ihrem Verhalten unter $\hat{P}$ fallen diese in folgende Klassen:

Skalar	$\hat{P}s = s$	
Pseudoskalar	$\hat{P}p = -p$	z.B. $p = \vec{v}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
Vektor	$\hat{P}\vec{v} = -\vec{v}$	z.B. $\vec{v} = \partial_t \vec{x}$
Axialvektor (oder: Pseudovektor)	$\hat{P}\vec{a} = \vec{a}$	z.B. $\vec{a} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, $\vec{r}\times\vec{F}$, $\vec{B}$

Die wichtigsten $J=0$ Mesonen (π, K, η, η'; S.S. 42) sind Pseudoskalare

denn: betrachte $\hat{P}$ im 2d Raum von Teilchen/Anti-T.

beide sind Eigenzustände von $\hat{P}$ $\to$ $\hat{P}$ diagonal, $\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

also hat T.-AntiT.-Zustand Gesamtparität $1\cdot(-1) = -1$

((angeregte Zustände: zusätzlicher Faktor $(-1)^\ell$ ↖ Bahndrehimpuls))

merken:

- Bewegungsrichtung = Vektor $\quad (\vec{v} = \partial_t \vec{x})$
- Spinvektor = Axialvektor $\quad (\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p})$
- Helizitäts- (oder Polarisations-) Zustand = Pseudoskalar

((= Projektion des Spinvektors auf Bewegungsrichtung))

Ladungskonjugation $\hat{C}$

konvertiert jedes Teilchen in sein Antiteilchen

im 2d Raum von T.-AntiT. : $\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

wieder $\hat{C}^2 = \mathbb{1}$

$\hat{C}$ vertauscht mit $\hat{H}$ der QED/QCD.

((haben allerdings T./AntiT.-Zustände nicht als Eigenzust. gewählt))

falls ein Teilchen sein eigenes Antiteilchen ist, hat man wieder einen Eigenzustand, mit EW $C = \pm 1$

Bsp π^0 hat $C = +1$, Photon γ hat $C = -1$

also ist $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ erlaubt (PDG: 98.8 %)

$\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$ verboten (PDG: $< 3 \cdot 10^{-8}$)

kombinierte diskrete Symmetrien

- die Kombination $\hat{C}\hat{P}$ ist sehr wichtig (s. später; s. Übung, Afg. 38). überführt Teilchen mit Helizität/Polarisation in Anti-T. mit entgegengesetztem Wert
- können Zeitumkehr definieren ((s. S. 7, $\Lambda_T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$)). der entsprechende Operator heißt $\hat{T}$. $\hat{T}$ nicht unabhängig von $\hat{C}\hat{P}$, denn: jede Lorentz-invariante QFT muß $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$-symmetrisch sein! [Pauli, 1955]

((Konsequenz der $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$-Symmetrie: Teilchen und Anti-T. haben dieselbe Masse und Lebensdauer. Experiment ⇒ ✓))

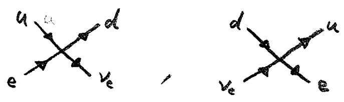
Paritätsverletzung

historisch: schwache Ww als Ursache des β-Zerfalls $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

[Fermi, 1932] Modell dafür: $\hat{\mathcal{L}}_I = -G_F \left(\hat{\bar{n}} \gamma^\mu \hat{p} \hat{\bar{\nu}}_e \gamma_\mu \hat{e} + \hat{\bar{p}} \gamma^\mu \hat{n} \hat{\bar{e}} \gamma_\mu \hat{\nu}_e \right)$

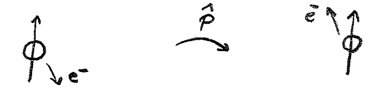
Fermi-Kopplung $G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\mathrm{GeV}^2}$; Feldoperatoren

heute würden wir das Fermi-Modell mit Partonen statt Nukleonen schreiben: $\hat{\mathcal{L}}_I = -G_F \left(\hat{\bar{d}} \gamma^\mu \hat{u} \hat{\bar{\nu}}_e \gamma_\mu \hat{e} + h.c. \right)$ ← "hermitesch konjugiert"

⇔ Vertizes 

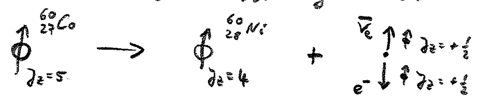
experimenteller Befund (C.S. Wu, 1957): in schwachen Zerfällen wird Parität verletzt! unerwartet!

Kobalt-60



beobachtet nicht beobachtet!

eine etwas andere Darstellung dieses Experiments:



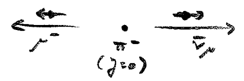
⇒ $\frac{\bar{\nu}_e}{\nu_e}$ sollte immer $\frac{\text{rechtshändig}}{\text{links}}$ sein, mit Helizität $h = +1$ / $h = -1$

→ Paritätsverletzung nicht nur beim Betazerfall des Kobalts, sondern ein "Markenzeichen" der schwachen Ww.

z.B.: $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$ $(P = +1)$ (PDG: 20.7 %)

$K^+ \to \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$ } $(P = -1)$ 1.8

$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ 5.6

z.B.: $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$: 

es werden nur $h = +1$ - Myonen beobachtet.

((das Antineutrino wird natürlich nicht beobachtet, muß aber wegen Drehimpuls-Erhaltung auch $h = +1$ haben))

→ Fermi-Modell muß geändert werden!

L-Invarianz ⇒ Helizitätsoperator (($h = \vec{e}_p \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$, s. S. 23)) nicht brauchbar; aber Chiralitätsoperator (($\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$)), - Projektoren $P_{L/R}$.

((masselose T. : Chir. ≙ Hel. , s. S. 24))

schwache WW sollen also nur linkshändige (P_L) Teilchen und rechtshändige (P_R) Antiteilchen erzeugen:

$$P_{R/L} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \quad , \quad \psi_{R/L} \equiv P_{R/L}\,\psi$$

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} \equiv -2\sqrt{2}\,G_F \left\{ \hat{\bar{d}}\gamma^\mu P_L \hat{u}\; \hat{\bar{\nu}}_e \gamma_\mu P_L \hat{e} + \hat{\bar{u}}\gamma^\mu P_L \hat{d}\; \hat{\bar{e}}\gamma_\mu P_L \hat{\nu}_e \right\}$$

$$= -2\sqrt{2}\,G_F \left\{ \hat{\bar{d}}_L \gamma^\mu \hat{u}_L\; \hat{\bar{\nu}}_{eL} \gamma_\mu \hat{e}_L + \hat{\bar{u}}_L \gamma^\mu \hat{d}_L\; \hat{\bar{e}}_L \gamma_\mu \hat{\nu}_{eL} \right\}$$

[s. Übungen, Aufgabe 34]

Bem. der Name "V-A"-Modell steht für "Vektor minus Axialvektor"; denn $\gamma^\mu P_L \sim \gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5$, und

$\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$ transformiert wie ein Vektor

$\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2$ -"- Axialvektor (vgl. S. 53)

Seltsamkeitsverletzung

in der schwachen WW werden viele andere (außer P) QZ verletzt.

z.B. : $\underset{(u\bar{s})}{K^+} \to \pi^+\pi^0$, $\pi^+\pi^0\pi^0$: Seltsamkeit S verletzt!

z.B : $\underset{(c\bar{u})}{D^0} \to K^-\pi^+\pi^0$: Charmness C verletzt! (PDG: 13.9 %)

können wir diese Prozesse ins Fermi-Modell aufnehmen?

→ def. Fermion-Dubletten, charakterisiert durch el. Ladung und "Generation":

Leptonen : $L_1 \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$; $L_2 \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$ ← $Q = 0$ ← $Q = -1$

Quarks : $Q_1 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$; $Q_2 \equiv \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ ← $Q = +2/3$ ← $Q = -1/3$

((Bem.: ∃ jeweils dritte Generation; spielt in obigen Prozessen keine Rolle))

Bem: Zuordnung der Quarks zu "Generationen" ist Konvention.

Hier: c-Quark definiert zweite Generation

→ untere Komponenten können noch Linearkombinationen aus d, s sein.

$$Q_1' \equiv \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} , \quad Q_2' \equiv \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Cabibbo-Winkel $\sin\theta_c \approx 0.2286$, $\theta_c \approx 13.1°$

könnten wir dasselbe mit L_1, L_2 machen?

→ im Prinzip ja; aber ν_e, ν_μ (in guter Näherung) masselos, also (fast) identisch, also macht Rotation keinen Unterschied.

ursprüngliches Fermi-Modell (s. S. 56)

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} = -2\sqrt{2}\,G_F \left\{ \hat{\bar{Q}}_{1L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \hat{Q}_{1L}\; \hat{\bar{L}}_{1L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1L} + h.c. \right\}$$

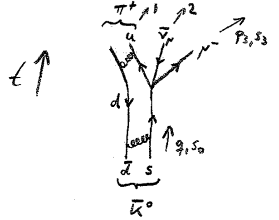
→ Verallgemeinerung:

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} = -2\sqrt{2}\,G_F \sum_{D_L} \sum_{D_L'} \hat{\bar{D}}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L\; \hat{\bar{D}}_L' \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L'$$

mit $D_L, D_L' \in \{ Q_{1L}', Q_{2L}', L_{1L}, L_{2L} \}$ $\binom{1}{2} \Rightarrow \bar{2}\gamma^\mu 1 \cdot \bar{1}'\gamma_\mu 2'$

einfache Struktur; beinhaltet sehr viele verschiedene Prozesse!

Bsp "semileptonischer" Zerfall $\bar{K}^0 \to \pi^+\mu^-\bar{\nu}_\mu$



u, μ^- auslaufende Teilchen: in $\hat{\bar{\psi}}$

s einlaufende T.

$\bar{\nu}_\mu$ auslaufende Anti-T. } in $\hat{\psi}$ (vgl. S. 22)

↓ ↓

Q_1' L_2

→ obiger Prozess vermittelt durch

$$\hat{\mathcal{L}}_I \ni -2\sqrt{2}\,G_F\; \hat{\bar{\mu}}_L \gamma^\mu \hat{\nu}_L\; \hat{\bar{u}}_L \gamma_\mu \hat{d}_L'$$

$$\to -2\sqrt{2}\,G_F \sin(\theta_c)\; \hat{\bar{\mu}}\gamma^\mu P_L \hat{\nu}\; \hat{\bar{u}}\gamma_\mu P_L \hat{s}$$

→ Amplitude berechnen wie "gewohnt" (vgl. S. 33, 37)

$$\mathcal{M} = -\frac{i}{\sqrt{2}} G_F \sin(\theta_c)\; \bar{u}(\vec{p}_3, s_3)\gamma^\mu(1-\gamma_5)v(\vec{p}_2, s_2) \cdot \bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\vec{q}, s_0)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \ldots$$

Unitaritätsgrenze

Fermi-Modell ist sehr erfolgreich: beschreibt fast alle schwachen Zerfälle. Es gibt jedoch theoretische Argumente, die seine Grenzen aufzeigen:

(a) betrachte z.B. $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ - Streuung im CMS.

$s = (q_1 + q_2)^2$; Frage: Wirkungsquerschnitt $\sigma(s)$ für große s?

dimensionale Analyse :

$$\mathcal{M} \text{ hat } \overset{\approx 1.166 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}}{G_F} \Rightarrow |\mathcal{M}|^2 \text{ hat } G_F^2$$

$$[\sigma] = [\text{Fläche}] = [\mathrm{fm}^2] = [\mathrm{GeV}^{-2}]$$

für $s \gg m_e^2$ gibt es keine anderen Skalen $\Rightarrow$ $\underline{\sigma \sim G_F^2 s}$

((die genaue Antwort ist $\sigma = \frac{G_F^2 s}{3\pi}$))

dieses Verhalten $\sigma(s \gg m_e) \sim s$ kann aber nicht richtig sein:

betrachte Streumatrix (vgl. §3, S. 25, 26, 29)

$$\hat{S} = \underset{\text{Zeitentwicklungs-Op.}}{\hat{U}_I(+\infty, -\infty)} = \mathbb{1} - i \underset{\text{Transfermatrix}}{\hat{T}}$$

$$\langle f | \hat{T} | i \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)\, T_{fi}$$

Gesamtwahrscheinlichkeit bleibt erhalten $\Leftrightarrow$ $\hat{S}$ unitär $\Leftrightarrow$ $\hat{S}^+ \hat{S} = \mathbb{1}$

$$\Leftrightarrow (\mathbb{1} + i\hat{T}^+)(\mathbb{1} - i\hat{T}) = \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{T}^+ \hat{T} = i(\hat{T} - \hat{T}^+)$$

also ist

$$i \langle f | \hat{T} - \hat{T}^+ | i \rangle \overset{!}{=} \langle f | \hat{T}^+ \hat{T} | i \rangle = \sum_n \langle f | \hat{T}^+ | n \rangle \langle n | \hat{T} | i \rangle$$

bzw.

$$i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p_f - \Sigma q_i) [T_{fi} - T_{if}^*] = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p_f - \Sigma r_n)\, T_{nf}^* \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma r_n - \Sigma q_i)\, T_{ni}$$

$$\Leftrightarrow \quad i [T_{fi} - T_{if}^*] = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma r_n - \Sigma q_i)\, T_{nf}^* T_{ni}$$

wir wissen (s. z.B. S. 29), daß $T_{fi} \sim \mathcal{M}$ ist; nach Phasenraum int. sagt diese Formel also etwas über das Verhalten von σ aus.

---

eine genaue Analyse ist kompliziert;

Resultat: σ kann für große s höchstens logarithmisch wachsen. "Froissart-Grenze"

$\Rightarrow$ lineares Wachstum, wie oben per dim. Analyse hergeleitet, verletzt Unitarität, also Wahrscheinlichkeitserhaltung!

(b) ein anderes Argument ist die sog. "Renormierbarkeit" (s. später).

Resultat: Fermi-Modell kann nur für $s \lesssim G_F^{-1}$ richtig sein.

$\Rightarrow$ Fermi-Modell ist keine komplette Theorie der schwachen Ww'n!

$W^\pm$ - Teilchen

die Lösung der Situation ist genial [O. Klein 1938]:

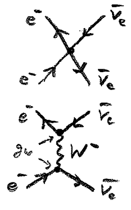
definiere $G_F =: \frac{g_w^2}{4\sqrt{2}\, m_w^2}$, g_w, m_w erstmal unbekannt

def

$$J_+^\mu \equiv \sum_{D_L} \hat{\bar{D}}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L \quad ; \quad (J_+^\mu)^+ = \sum_{D_L} \hat{\bar{D}}_L \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L$$

dann ist das Fermi-Modell

$$\hat{\mathcal{L}}_I = -\frac{g_w^2}{2} J_+^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{m_w^2} (J_+^\nu)^+$$



ersetze dies durch

$$\hat{\mathcal{L}}_I = i \frac{g_w^2}{2} J_+^\mu \underbrace{\frac{i}{s - m_w^2} (-g_{\mu\nu})}_{} (J_+^\nu)^+$$

wie Photon-Propagator, aber mit Masse!

Relevanz: für $s \ll m_w^2$ ändert sich nichts

aber für $s \gg m_w^2$ wird $\sigma_{tot} = \frac{G_F^2 s}{3\pi} \cdot \left(\frac{m_w^2}{s - m_w^2}\right)^2 \approx \frac{G_F^2 m_w^4}{3\pi s}$

$\Rightarrow$ Problem durch Einführung neuer Teilchen gelöst!

diese neuen T. (W^- und sein Antiteilchen W^+) haben Masse m_w und el. Ladung ($\pm e$)

die oben def. Objekte J_+^μ heißen "geladene Ströme"

Experiment?! $W^\pm$-Teilchen 1983 am CERN entdeckt.

Masse $m_w = 80.398 \pm 0.025$ GeV

Bezeichnung manchmal als "intermediäre Vektorbosonen"

Z^0 - Teilchen

das Problem mit $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ ist durch $W^\pm$ gelöst.

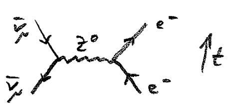
es gibt andere Prozesse, die in völliger Analogie dazu einen ungeladenen Partner der W's, das Z^0 [S.Bludman 1958] und "neutrale Ströme" $J_0^\mu = \sum_D \hat{\bar{D}} \left(c_V^u \gamma^\mu + c_A^u \gamma^\mu \gamma^5 \quad \overset{\circ}{c_V^d \gamma^\mu + c_A^d \gamma^\mu \gamma^5} \right) \hat{D}$ benötigen.

((nicht mehr reines "V-A"; $c_{V/A}^{u/d}$ numerische Koeff's, s. später))

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}}_Z \equiv i \frac{g_w^2}{2} J_0^\mu \frac{i}{s - m_Z^2} (-g_{\mu\nu}) J_0^\nu$$

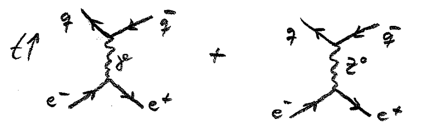
$m_Z = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV [CERN, 1983]

Bsp 1 Neutrinos haben jetzt auch direkte Ww z.B. ist $\bar{\nu}_\mu e^- \to \bar{\nu}_\mu e^-$ möglich



((expt. Nachweis der neutralen Ströme, CERN 1973, durch diesen Prozess))

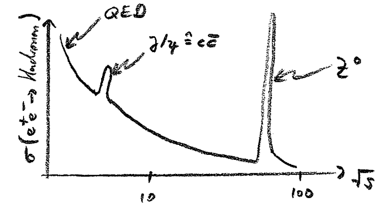
Bsp 2 $e^+e^- \to$ Hadronen (vgl. §5) bekommt zusätzlichen Beitrag:



QED — schwache Ww

S.44: $\sigma \sim \frac{1}{s}$ — s.o.: $\sigma \sim \frac{s}{(s-m_Z^2)^2} \to \infty$ für $s \to m_Z$!

Experiment:



---

7. elektroschwaches Standardmodell

bisher kennen wir

Teilchen: Quarks; Leptonen; Photon; Gluonen; $W^\pm$, Z^0

Ww'n: elektromagnetische; starke; schwache

expt. verifiziert ✓✓

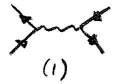
wir brauchen aber noch eine "bessere", übergeordnete Struktur.

warum? → wieder theoretische Argumente:

Renormierbarkeit

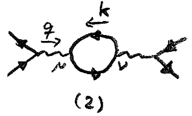
grundlegende Frage: sind höhere Ordnungen der Störungsreihe wirklich klein?

z.B



(1)
Baum-Niveau

vs.



(2)
1-Schleifen-Niveau

Größenordnung der Amplitude:

$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) *$ 

(Feynman-Regeln, s. S. 34, 36) →

$$\sim \mathcal{M}(1) * \frac{i}{q^2} \cdot e^2 \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, Sp\left[i\gamma^\mu \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2} i\gamma^\nu \frac{i(\not{q}+\not{k}+m)}{(q+k)^2-m^2} \right]$$

(γ-Spuren; wie bei e-μ-Streuung, s. S. 39) →

$$= \mathcal{M}(1) * \frac{(-4ie^2)}{q^2} \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu k^\nu + q^\mu k^\nu + q^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}(k^2 + k\cdot q - m^2)}{(k^2-m^2)((q+k)^2-m^2)}$$

Integral ist divergent!

(div1) "auf der Massenschale"

Nenner $= 0$ für $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$, $k_0 = -q_0 \pm \sqrt{(\vec{k}+\vec{q})^2+m^2}$

→ genauere Def. des Propagators beschreibt, wie mit diesen Polen umgegangen wird ("Einbettung")

(div2) "Ultraviolett-Divergenz"

für große $|\vec{k}|$. denn:

letzten Term im Zähler umformen:

$$k^2+kq-m^2 = k^2+\frac{1}{2}\left((q+k)^2-q^2-k^2\right)-m^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(k^2-m^2\right)+\frac{1}{2}\left((q+k)^2-m^2\right)-\frac{1}{2}q^2$$

→ der $g^{\mu\nu}$-Anteil des obigen Integrals ist dann

$$-g^{\mu\nu}\left\{\underbrace{\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2}}_{\text{quadratisch divergent!}}-\frac{q^2}{2}\underbrace{\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-m^2)\left((q+k)^2-m^2\right)}}_{\text{logarithmisch divergent!}}\right\}$$

(s. Übung, Aufgabe 35, 43) ⟷

⇒ Korrekturen scheinen also i.A. nicht klein, sondern unendlich zu sein!

Katastrophe? Nein! Selektionsargument für Theorien:

→ in sogenannten "renormierbaren Theorien" kürzen sich alle solche Divergenzen, wenn man Beziehungen zwischen physikalisch messbaren Größen berechnet. ((Kürzung funktioniert Ordnung für Ordnung in Störungstheorie))

Kriterien für renormierbare (= wohldefinierte) Theorien:

- die Lagrange-Dichten für Photonen, Gluonen, $W^\pm, Z^0$-Teilchen müssen "eichinvariant" sein (s.u.)
- die Lagrange-Dichte enthält nur WW'n zwischen drei (Bosonen, Fermionen) oder vier (Bosonen) Feldern
  ((also ist das Fermimodell nicht renormierbar))

Eichinvarianz

betrachte QED ("abelsche Eichtheorie")

haben bisher meist WW-Teil $\hat{\mathcal{L}}_I$ von $\hat{\mathcal{L}}$ untersucht

es gilt auch $\hat{\mathcal{L}}\big|_{\text{quadratisch (in Feldop's)}}$ → Propagatoren, Massen der Felder

---

((vgl. S. 15: A_μ Lsg der Max ⇒ $A_\mu + \partial_\mu \chi$ auch))

Eichtransformation: $\hat{A}_\mu \to \hat{A}_\mu{}' = \hat{A}_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$

Masse für $\hat{A}_\mu$ einführen?

Lorentz-Inv! → einzige Möglichkeit: $\delta\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}m^2 \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu$

aber: $\delta\hat{\mathcal{L}}' = \frac{1}{2}m^2\left[\hat{A}_\mu\hat{A}^\mu + \frac{2}{e}\hat{A}^\mu\partial_\mu\alpha + \frac{1}{e^2}(\partial_\mu\alpha)(\partial^\mu\alpha)\right]$

$\neq \delta\hat{\mathcal{L}}$ ⇒ Massenterm ist i.A. nicht eichinvariant!

d.h. Theorien mit solchen Massentermen sind i.A. nicht renormierbar.

OK für Photonen, Gluonen: ohnehin masselos.

→ aber wie erreicht man Renormierbarkeit für schwere Teilchen $(W^\pm, Z^0)$?

Masse für Skalarfelder $\hat{\phi}$ möglich?

$\hat{\phi} \to \hat{\phi}' = e^{i\alpha(x)}\hat{\phi}$, $\hat{\phi}^\dagger \to \hat{\phi}'^\dagger = e^{-i\alpha(x)}\hat{\phi}^\dagger$

⇒ $\delta\hat{\mathcal{L}} = m^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}$ ist eichinvariant ✓ ⇒ JA.

Masse für Fermionen $\hat{\psi}$ möglich?

wir haben gesehen, dass i.A. links- und rechtshändige Fermionen verschiedene WW'n fühlen

$\hat{\psi}_L \to \hat{\psi}_L{}' = e^{i\alpha(x)}\hat{\psi}_L$, $\hat{\psi}_R \to \hat{\psi}_R{}' = e^{i\beta(x)}\hat{\psi}_R$

die entsprechenden (quadratischen) L.-Invarianten verschwinden aber:

$\hat{\bar{\psi}}_L\hat{\psi}_L = \hat{\bar{\psi}}P_R P_L\hat{\psi} = \hat{\bar{\psi}}\frac{1}{4}(1+\gamma_5)(1-\gamma_5)\hat{\psi} = 0$ ⇒ NEIN.

((denn $\hat{\bar{\psi}}_L = P_L\bar{\psi} = P_L\psi^\dagger\gamma_0 = \psi^\dagger\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma_0 = \psi^\dagger\gamma_0\frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \bar{\psi}P_R$, s. Ü 34))

→ Massenterme für Vektorbosonen $(W^\pm, Z^0)$ und Fermionen (Quarks, Leptonen) also verboten ?! ↯

Nur für Skalarfelder erlaubt ??

→ Kernidee des Standardmodells

[Glashow/Weinberg/Salam, 1967; Nobel '79]

es gibt ein massives Skalarfeld ("Higgs-Boson", s. später), das mit den andern Feldern wechselwirkt. dadurch bekommen diese andern Felder eine Masse (genauer Mechanismus: s. später)

kurze Zusammenfassung der Logik :

Eichinvarianz ⇒ Renormierbarkeit ⇒ wohldefinierte Theorie

↳ erlaubt keine Massen für z.B. $W^\pm, Z^0$

↳ erlaubt jedoch eine Ww zwischen massivem Skalarfeld und $W^\pm, Z^0$ ⇒ brauchen (mind.) ein neues Teilchen

---

((Erinnerung : um das Verhalten der Integrale auf S. 62 zu untersuchen (vgl. Ü 35, Ü 43), Residuensatz .

z.B. $\int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{1}{z^2+1} = \arctan(z) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

oder $= \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{1}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \underbrace{\frac{1}{i+i}} = \pi$

$\underbrace{}$ ← $\mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1}$

, Bogen trägt nicht bei da $\sim \frac{R}{R^2} \to 0$))

Bausteine des Standardmodells ⇜ (SM)

- Eichinvarianz

  $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$

  $SU(3)_c$: starke Ww'n ; Farbladung (color)

  $SU(2)_L$: (linkshändige) schwache Ww'n ; $W^\pm, Z^0$

  $U(1)_Y$: "Hyperladung" ; → elektromagnet. Ww'n ; Photon γ

- Renormierbarkeit

  erlaubt sind lorentzinvar. Vertizes mit drei Bosonen + Fermionen oder vier Bosonen

- Materie-Teilchen

  Leptonen $L_{1L} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ $L_{2L} = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$ $L_{3L} = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$

  e_R μ_R τ_R

  Quarks $Q'_{1L} = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$ $Q'_{2L} = \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$ $Q'_{3L} = \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$

  u_R c_R t_R

  d_R s_R b_R

  Skalarfeld ≡ "Higgs-Feld" Φ

- Quantenzahlen

  jedes Teilchens unter jeder der Eichsymmetrien gibt an, ob und mit welcher Ladung Q_i das entsprechende Teilchen unter der Eichsymmetrie transformiert wird.

- Kopplungskonstanten

  bei der Konstruktion der allgemeinsten möglichen Lagrangedichte nach obigen Prinzipien benötigte freie Parameter

Bem.:
- Prinzipien sehr einfach. "Schönheit" der El.-Teilchen-Physik.
- das SM ist nicht sehr einfach:
  viele Teilchen, viele Parameter
- offene Fragen z.B.: warum genau diese Eichsymmetrie?
  〃 Quantenzahlen?
  woher kommen die Parameterwerte?
- Beantwortung dieser Fragen von theoretischer Seite:
  Aufgabe der "Physik jenseits des SM" (s. z.B. §8)
- experimentell sind alle diese Werte bekannt (± Messfehler)
  (s. z.B. PDG Booklet)

Jetzt: genauere Betrachtung einiger Teile der Lagrange-Dichte

((Ww'n zwischen $W^\pm, Z^0, \gamma$, Quarks: s.o.
Gluonen haben keine Ww'n mit dem Higgs-Boson.))

(1) Ww'n zwischen $W^\pm, Z^0, \gamma$ und Higgs-Boson
  ⇒ Massen für $W^\pm, Z^0$

(2) Dynamik des Higgs-Bosons
  ⇒ warum hat man es noch nicht experimentell gesehen?

(3) Ww'n zwischen Quarks und Higgs-Boson
  ⇒ Massen für Quarks; CP

(1) Ww'n zwischen $W^\pm, Z^0, \gamma$ und Higgs

Quantenzahlen des Higgs-Bosons:

neutral unter $SU(3)_c$

transformiert unter $SU(2)_L$ ⇒ $\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^+ \\ \hat{\phi}^0 \end{pmatrix}$

transformiert unter $U(1)_Y$, mit Ladung $-\frac{1}{2}$

aus Übung, Aufg. 44: allg. eichinvar. Form ((unter $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$, $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$))

$$\sim [(\partial_\mu - ie\hat{A}_\mu)\hat{\phi}]^\dagger [(\partial^\mu - ie\hat{A}^\mu)\hat{\phi}]$$

$$\Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}} = [D_\mu \hat{\Phi}]^\dagger [D^\mu \hat{\Phi}]$$

wobei $D_\mu \equiv \partial_\mu - i g_w T^a \hat{A}^a_\mu + \frac{1}{2} i g_Y \hat{B}_\mu$

(S.59) → schwache Kopplungskonst.

(S.13) → 2×2-Matrizen; $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$

drei SU(2)-Felder; $a = 1,2,3$
⇒ $W^\pm, Z^0$

Hyperladungs-Feld
↔ Photon; s. unten, S.69

Hyperladungs-Kopplung
↔ "e" s. unten, S.69

Hyperladung $= -\frac{1}{2}$

- mehr zu dieser Struktur (Konsequenzen, ..): s. unten, S.68

(2) Dynamik des Higgs

Terme, die nur das Higgs-Boson enthalten, werden als "Potential" bezeichnet: $\delta\hat{\mathcal{L}} \equiv -V(\hat{\Phi})$

es gibt nur 2 eichinvar. Möglichkeiten: $V(\hat{\Phi}) = \mu^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} + \lambda (\hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi})^2$

μ^2, λ: freie Parameter; mehr dazu: s. unten, S.70

(3) Ww'n zwischen Quarks und Higgs

brauchen jetzt zwei Objekte $\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^+ \\ \hat{\phi}^0 \end{pmatrix}$, $\hat{\tilde{\Phi}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\phi}^{0*} \\ -\hat{\phi}^{+*} \end{pmatrix} = i\sigma^2 \hat{\Phi}$
(vgl. Übung, Aufgabe 46)

$$\Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}} = -h_u \left[\hat{\bar{Q}}'_{1L} \hat{\tilde{\Phi}} \hat{u}_R + \hat{\bar{u}}_R \hat{\tilde{\Phi}}^\dagger \hat{Q}'_{1L} \right]$$
$$- h_d \left[\hat{\bar{Q}}'_{1L} \hat{\Phi} \hat{d}_R + \hat{\bar{d}}_R \hat{\Phi}^\dagger \hat{Q}'_{1L} \right] + 2.+3.\ \text{Generation}$$

- wiederum gibt es keinen Grund, genau $\hat{u}_R / \hat{d}_R$ der ersten Generation zuzuordnen. Allgemeiner: $\hat{u}''_R / \hat{d}''_R$ als Lin. Komb. aller Quarks mit gleichen Quantenzahlen. Genauer: s. später (S.73ff)
- Quark-Higgs Ww'n nennt man auch Yukawa-Ww'n.
  mehr: s. unten, S.73

Eichbosonen $W^\pm, Z^0, \gamma$ im SM

Eichinvarianz erlaubt keine direkten Massenterme (s. S. 63).

WW zwischen Spin-1 und Spin-0 Feldern jedoch erlaubt (s. S. 67):

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^+ \\ \hat{\phi}^0 \end{pmatrix} \quad , \quad \delta\hat{\mathcal{L}} = [D_\mu \hat{\Phi}]^\dagger [D^\mu \hat{\Phi}]$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_W T^a \hat{A}^a_\mu + \tfrac{1}{2} i g_Y \hat{B}_\mu$$

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad , \quad \vec{\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1}_{2\times 2} + i \varepsilon^{ijk} \sigma^k$$

wie ergibt sich hieraus eine Masse ?

Annahme: irgendeine Dynamik (genauer: s. unten $\overset{S.70}{\swarrow}$) bestimmt in guter Näherung $\hat{\Phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, v konstant

$$\Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}} \approx \frac{1}{2} \left[\left(-i g_W T^a \hat{A}^a_\mu + \tfrac{1}{2} i g_Y \hat{B}_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[\left(-i g_W T^b \hat{A}^{b\mu} + \tfrac{1}{2} i g_Y \hat{B}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (0, v^*) \left(\frac{i g_W}{2} \sigma^a \hat{A}^a_\mu - \frac{i g_Y}{2} \hat{B}_\mu \right) \left(-\frac{i g_W}{2} \sigma^b \hat{A}^{b\mu} + \frac{i g_Y}{2} \hat{B}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

(s. Übg. A.11)

$$= \frac{|v|^2}{8} (0,1) \left(g_W^2 \underbrace{\sigma^a \sigma^b}_{} \hat{A}^a_\mu \hat{A}^{b\mu} - g_W g_Y \sigma^a \left[\hat{A}^a_\mu \hat{B}^\mu + \hat{B}^\mu \hat{A}^a_\mu \right] + g_Y^2 \hat{B}_\mu \hat{B}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↳ gleichzeitige Feldop's vertauschen $\longrightarrow \delta^{ab} \mathbb{1}_{2\times 2} + \cancel{i\varepsilon^{abc}\sigma^c}$ antisym. in $a \leftrightarrow b$

außerdem: $(0,1)\, \sigma^a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\delta^{a3}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{g_W |v|}{2} \right)^2 \left(\hat{A}^1_\mu \hat{A}^{1\mu} + \hat{A}^2_\mu \hat{A}^{2\mu} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{|v|}{2} \right)^2 \left\{ g_W^2 \hat{A}^3_\mu \hat{A}^{3\mu} + g_W g_Y \left(\hat{A}^3_\mu B^\mu + \hat{B}_\mu \hat{A}^{3\mu} \right) + g_Y^2 \hat{B}_\mu \hat{B}^\mu \right\}$$

$$= \left(g_W \hat{A}^3_\mu + g_Y \hat{B}_\mu \right) \left(g_W \hat{A}^{3\mu} + g_Y \hat{B}^\mu \right)$$

$$= (g_W^2 + g_Y^2) \Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{g_W}{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}}}}_{= \cos(\theta_W)} \hat{A}^3_\mu + \underbrace{\boxed{\frac{g_Y}{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}}}}_{= \sin(\theta_W)} \hat{B}_\mu \Bigg) \left(\frac{g_W}{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}} \hat{A}^{3\mu} + \frac{g_Y}{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}} \hat{B}^\mu \right)$$

$$\equiv \hat{Z}_\mu$$

↑ θ_W = **Weinberg-Winkel**

bzw. „schwacher Mischungswinkel"

d.h.: können also durch Einführung einer neuen Basis

$$\begin{pmatrix} \hat{Z}_\mu \\ \hat{Q}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}^3_\mu \\ \hat{B}_\mu \end{pmatrix}$$

das $\delta\hat{\mathcal{L}}$ diagonalisieren !

mit den weiteren Bezeichnungen

$$m_W = \frac{g_W |v|}{2} \quad , \quad m_Z = \frac{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}\,|v|}{2}$$

wird das obige $\delta\hat{\mathcal{L}}$ also zu

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m_W^2 \left(\hat{A}^1_\mu \hat{A}^{1\mu} + \hat{A}^2_\mu \hat{A}^{2\mu} \right) + \frac{1}{2} m_Z^2 \hat{Z}_\mu \hat{Z}^\mu + 0 \cdot \hat{Q}_\mu \hat{Q}^\mu$$

Coulomb-Eichung: $\hat{A}^a_0 = \hat{B}_0 = 0$

$$\longrightarrow -\frac{1}{2} m_W^2 \left(\hat{A}^1_i \hat{A}^1_i + \hat{A}^2_i \hat{A}^2_i \right) - \frac{1}{2} m_Z^2 \hat{Z}_i \hat{Z}_i - 0 \cdot \hat{Q}_i \hat{Q}_i$$

wir erhalten also zwei Teilchen mit Masse m_W $\Leftrightarrow W^\pm$

ein 〃 $m_Z > m_W$ $\Leftrightarrow Z^0$

ein masseloses Feld $\hat{Q}_\mu$ $\Leftrightarrow \gamma$

⇒ exakt so wie beobachtet !!!

wie sieht D_μ in der neuen Basis aus ? ($Q_Y = -\frac{1}{2}$ für Higgs)

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_W T^a \hat{A}^a_\mu - i Q_Y g_Y \hat{B}_\mu$$

$$= \partial_\mu - i \frac{g_W}{2} \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^1_\mu - i \hat{A}^2_\mu \\ \hat{A}^1_\mu + i \hat{A}^2_\mu & 0 \end{pmatrix} - i \frac{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta_W \hat{A}^3_\mu + 2 Q_Y \sin\theta_W \hat{B}_\mu & 0 \\ 0 & -\cos\theta_W \hat{A}^3_\mu + 2 Q_Y \sin\theta_W \hat{B}_\mu \end{pmatrix}$$

Kopplung der $W^\pm$ an „geladene Ströme", vgl. S. 59

Kopplung der Z^0, γ an „neutrale Ströme", vgl. S. 60

$$\left(\begin{pmatrix} \hat{A}^3_\mu \\ \hat{B}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Z}_\mu \\ \hat{Q}_\mu \end{pmatrix} \right) \quad = \begin{pmatrix} [\cos^2\theta_W + 2Q_Y \sin^2\theta_W] \hat{Z}_\mu + \cos\theta_W \sin\theta_W (-1 + 2Q_Y) \hat{Q}_\mu & 0 \\ 0 & [-\cos^2\theta_W + 2Q_Y \sin^2\theta_W] \hat{Z}_\mu + \cos\theta_W \sin\theta_W (1 + 2Q_Y) \hat{Q}_\mu \end{pmatrix}$$

Higgs-Boson: $Q_Y = -\frac{1}{2}$ ⇒ untere Komponente koppelt nicht an $\hat{Q}_\mu$ (also el. neutral)

⇒ obere 〃 koppelt mit $+ i \sqrt{g_W^2 + g_Y^2} \cos\theta_W \sin\theta_W \equiv i e$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{e = g_W \sin\theta_W}}$ (vgl. Übg. Afg. 47)

SSB: spontane Symmetriebrechung + Higgs

oben: $W^\pm, Z^0, \gamma$ bekommen die korrekten Massen, falls

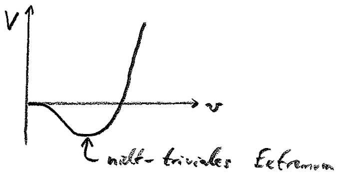
$\hat{\Phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$, $v =$ konst.

↑ hier: wie könnte das passieren ?

$\delta\hat{\mathcal{L}} = -V(\hat{\Phi})$, $V(\hat{\Phi}) = \mu^2 \hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi} + \lambda(\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi})^2$ (s. o.)

$\hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ als Ansatz einsetzen $\Rightarrow V = \frac{1}{2}\mu^2 v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4$

→ falls $\mu^2 < 0$, $\lambda > 0$ gilt, dann $v \neq 0$ durch die Dynamik als "Extremum" bestimmt werden !



→ dieses Phänomen nennt man "spontane Symmetriebrechung" :
$\hat{\mathcal{L}}$ selbst hat viel (Eich-)Symmetrie ,

z.B. $V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}\right) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\iv\end{pmatrix}\right) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix}\right) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}iv\\0\end{pmatrix}\right)$ etc ,

jedoch wählen wir (und die Natur auch!) einen speziellen Wert als Repräsentanten des Extremums aus .

ab jetzt schreiben wir : $\boxed{V(\hat{\Phi}) = -\mu^2 \hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi} + \lambda(\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi})^2}$

und nehmen an, dass $\mu^2 > 0$, $\lambda > 0$

→ $V = -\frac{1}{2}\mu^2 v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4$, $V' = -\mu^2 v + \lambda v^3 = 0 \Rightarrow \underline{v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}}$

natürlich ist $\hat{\Phi} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ keine exakte Ersetzung , sondern eine Näherung. Mehr Genauigkeit: Ableitungen um diesen Punkt. Bei den Ableitungen gibt es einen wichtigen Unterschied, da die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt :

((der verschiedenen, unabhängigen Ableitungen))

- Theorien mit globaler Symmetrie
(Symmetrietransformation unabhängig von x)
Extremum kann als $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ gewählt werden
allg. Ableitung aus $\hat{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\hat{\phi}_2(x) + i\hat{\phi}_3(x)\\ v + \hat{\phi}_0(x) + i\hat{\phi}_1(x)\end{pmatrix}$, ϕ_i : reelle Felder

  → vier neue Teilchen $(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$, vgl. Übung, Aufgabe 48

- Theorien mit lokaler Symmetrie = Eichsymmetrie
es gibt weniger unabhängige Ableitungen
für eine abelsche Symmetrie kann Phase immer weggedreht werden (s. S. 63)
für $SU(2)_L$ zeigt sich, daß $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$ weggedreht werden können

((denn: $\hat{\Phi}(x) \to \hat{\Phi}'(x) = e^{i\sigma^a \hat{\phi}_a(x)\frac{1}{v}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + \phi_0(x)\end{pmatrix}$, $a = 1,2,3$

"kleine" Störung $\hat{\phi}_a$

$\approx \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 + i\phi_3/v & i\phi_1/v + \phi_2/v\\ i\phi_1/v - \phi_2/v & 1 - i\phi_3/v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v + \phi_0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_2 + i\phi_1\\ v + \phi_0 - i\phi_3\end{pmatrix}$))

($e^{i\vec{\sigma}\vec{a}} \in SU(2)$, s. Übung, A 18f, A 45a)

→ ein neues Teilchen $(\hat{\phi}_0)$, das Higgs-Boson

also $\hat{\Phi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + \hat{\phi}_0(x)\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi} = \frac{1}{2}(v^2 + 2v\hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_0^2)$

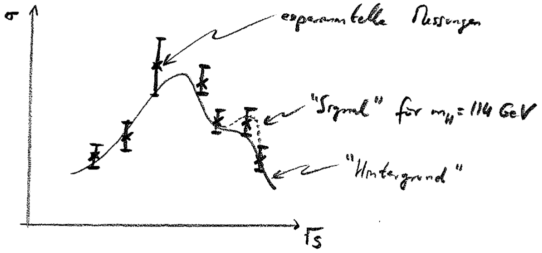
$$\Rightarrow V(\hat{\Phi}) = -\frac{\mu^2}{2}(v^2 + 2v\hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_0^2) + \frac{\lambda}{4}(v^4 + 4v^3\hat{\phi}_0 + 2v^2\hat{\phi}_0^2 + 4v^2\hat{\phi}_0^2 + 4v\hat{\phi}_0^3 + \hat{\phi}_0^4)$$

$$= \underbrace{-\frac{\mu^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4}_{\text{s. S. 70}} + \underbrace{(-\mu^2 + \lambda v^2)}_{= 0\,!} v\hat{\phi}_0 + \frac{1}{2}\underbrace{(-\mu^2 + 3\lambda v^2)}_{\equiv m_H^2 = 2\lambda v^2 = 2\mu^2 > 0\ (!w)}\hat{\phi}_0^2 + \underbrace{\lambda v\hat{\phi}_0^3 + \frac{\lambda}{4}\hat{\phi}_0^4}_{\text{Ww'n}}$$

→ haben also keine theoretische Vorhersage für die Higgs-Masse ; wissen aber, daß es ein neues Teilchen mit bestimmten Ww'n geben muß.

→ experimentell: Higgs-Boson noch nicht entdeckt.

LEP (CERN):
wenn Higgs ex.,
dann $m_H > 114$ GeV
((vgl. hep-ex/0306033,
Ergebnis der direkten
SM-Higgs-Suche am LEP))

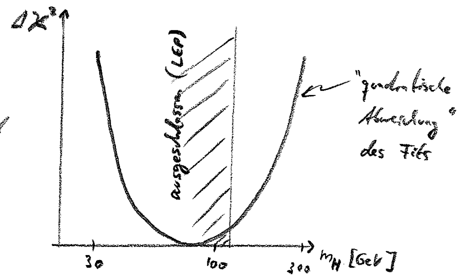


→ experimentell: "Hinweise" für "leichtes" Higgs.

Präzisions-Messungen vieler
Parameter des SM

$\Rightarrow$ mit $\begin{pmatrix} 90 \\ 95 \\ 99 \end{pmatrix}$% Wahrscheinlichkeit

ist $m_H \leq \begin{pmatrix} 155 \\ 167 \\ 195 \end{pmatrix}$ GeV



((vgl. arXiv:0712.0929, bzw. http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG))

Einfluss der Higgs-Masse durch "Schleifen": 

Also:
- wenn das Potential des Higgs-Feldes die richtige Form hat (($-\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4$)), wird $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Eichinvarianz spontan gebrochen.
  → dann erhalten $W^\pm, Z^0$ Masse, γ nicht.
- das Higgs-Boson muss entdeckt werden, um sicher zu sein, dass dieser Mechanismus wirklich für die Massen verantwortlich ist!

- nächste Vorlesung: Mo, 10.1.2011, 12:15

Quark-Massen

von S. 67:

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -h_u \left[\hat{\bar{Q}}'_{1L} \hat{\tilde{\Phi}} \hat{u}''_R + \hat{\bar{u}}''_R \hat{\tilde{\Phi}}^+ \hat{Q}'_{1L} \right]$$
$$-h_d \left[\hat{\bar{Q}}_{1L} \hat{\Phi}\, d''_R + \hat{\bar{d}}''_R \hat{\Phi}^+ \hat{Q}'_{1L} \right] \quad + 2.+3.\ \text{Generation}$$

mit $\hat{Q}'_{1L} = \begin{pmatrix} \hat{u}_L \\ \hat{d}'_L \end{pmatrix}$ und $\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^+ \\ \hat{\phi}^0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

$\hat{\tilde{\Phi}} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^{0*} \\ -\hat{\phi}^{+*} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}}\Big|_{\text{quadratisch}} = -h_u \frac{v}{\sqrt{2}} \left[\hat{\bar{u}}_L \hat{u}''_R + \hat{\bar{u}}''_R \hat{u}_L \right]$$
$$-h_d \frac{v}{\sqrt{2}} \left[\boxed{\hat{\bar{d}}'_L \hat{d}''_R} + \hat{\bar{d}}''_R d'_L \right] \quad + 2.+3.\ \text{Generation}$$

$$= (P_L \hat{d}')^+ \gamma^0 P_R \hat{d}'' = \hat{d}'^+ P_L^+ \gamma^0 P_R \hat{d}'' \quad , \quad \left.\begin{matrix} \gamma_5^+ = \gamma_5 \\ \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \end{matrix}\right\} \text{s. Übung 10.c}$$
$$= \hat{d}'^+ \gamma^0 P_R P_R \hat{d}'' = \hat{\bar{d}}' P_R \hat{d}'' \quad ((\text{vgl. Übung, 34.6}))$$

$$= -h_u \frac{v}{\sqrt{2}} \left[\hat{\bar{u}} P_R \hat{u}'' + \hat{\bar{u}}'' P_L \hat{u} \right]$$
$$-h_d \frac{v}{\sqrt{2}} \left[\hat{\bar{d}}' P_R \hat{d}'' + \hat{\bar{d}}'' P_L \hat{d}' \right] \quad + 2.+3.\ \text{Generation}$$

benutze jetzt die Freiheit der Definition von $\hat{u}'', \hat{d}''$:
wir legen fest, dass $\hat{u}, \hat{d}$ die "Masseneigenzustände" bezeichnen,
d.h. $\delta\hat{\mathcal{L}}\big|_{\text{quadratisch}}$ sollte diagonalisiert sein.

- $\hat{u}'' \equiv \hat{u} \quad \Rightarrow \quad \hat{\bar{u}}\left[P_R + P_L \right] \hat{u} = \hat{\bar{u}} \hat{u} \quad \Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}} = -\boxed{\frac{h_u v}{\sqrt{2}}}\, \hat{\bar{u}} \hat{u}$

  ((etc für c, t Quarks)) Masse des Up-Quarks $\equiv m_u$

- für die d-Quarks ist die Diagonalisierung etwas komplizierter; müssen alle drei Generationen gleichzeitig betrachten.

  schreibe: $\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} d'' \\ s'' \\ b'' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$

  mit V, U unitäre Matrizen

dann ist die untere Zeile von $\delta\hat{\mathcal{L}}$ / quad.

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -\frac{v}{\sqrt{2}}\hat{\overline{\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}}}\underbrace{V^+\begin{pmatrix}h_d&&\\&h_s&\\&&h_b\end{pmatrix}U}_{\overset{!}{=}\operatorname{diag}(h_d,h_s,h_b)}P_R\hat{\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}} - \frac{v}{\sqrt{2}}\hat{\overline{\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}}}\underbrace{U^+\begin{pmatrix}h_d&&\\&h_s&\\&&h_b\end{pmatrix}V}_{\overset{!}{=}\operatorname{diag}(h_d,h_s,h_b)}P_L\hat{\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}}$$

gleichzeitige Lsg : $U \equiv \begin{pmatrix}1/h_d&&\\&1/h_s&\\&&1/h_b\end{pmatrix}V\begin{pmatrix}h_d&&\\&h_s&\\&&h_b\end{pmatrix}$

V beliebig

$$= -\underbrace{\boxed{\frac{h_d v}{\sqrt{2}}}}_{\equiv m_d}\hat{\bar{d}}\hat{d} - \underbrace{\boxed{\frac{h_s v}{\sqrt{2}}}}_{\equiv m_s}\hat{\bar{s}}\hat{s} - \underbrace{\boxed{\frac{h_b v}{\sqrt{2}}}}_{\equiv m_b}\hat{\bar{b}}\hat{b}$$

CKM - Matrix

die Matrix **V** ist eine Verallgemeinerung der Cabibbo-Matrix (s. S. 57), und wird Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) - Matrix genannt (1973).

↳ [Nobel-Preis 2008]

schreibe: $V \equiv \begin{pmatrix}V_{ud}&V_{us}&V_{ub}\\V_{cd}&V_{cs}&V_{cb}\\V_{td}&V_{ts}&V_{tb}\end{pmatrix}$

die Matrixelemente V_{ij} (($\in \mathbb{C}$, aber $V^+V \overset{!}{=} \mathbb{1}$)) sind Parameter des SM ; können gemessen werden ; Resultat (vgl. PDG Booklet, S. 181 ff) : $|V| \approx \begin{pmatrix}0.97&0.23&0.004\\0.23&0.97&0.04\\0.01&0.04&0.999\end{pmatrix}$

→ in der Natur ist V "fast diagonal" !

CP - Verletzung

Die CKM - Matrix hat etwas mit diesem wichtigen Phänomen zu tun. Erinnerung:

(Übg, Aufgabe 38): $|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overset{d\bar{s}}{|K^0\rangle} - \overset{s\bar{d}}{|\bar{K}^0\rangle})$; $\hat{C}\hat{P}\,|K_S^0\rangle = +\,|K_S^0\rangle$

$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$; $\hat{C}\hat{P}\,|K_L^0\rangle = -\,|K_L^0\rangle$

(Skript, S. 54): $\hat{C}\hat{P}\;|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle = +\,|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle$

$\hat{C}\hat{P}\;|\pi^0\rangle|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle = -\,|\pi^0\rangle|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle$

also sind die folgenden Zerfälle erlaubt:

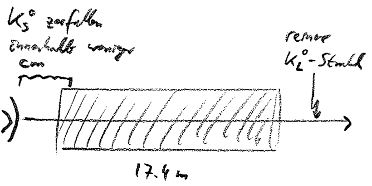
$K_S^0 \to \pi^+\pi^-$ (PDG-Booklet: $\Gamma_i/\Gamma \approx 69\%$) ; $\tau \approx 0.9\cdot10^{-10}\,s \Rightarrow c\tau \approx 2.7\,cm$

$K_L^0 \to \pi^0\pi^+\pi^-$ 13% ; $\tau \approx 5.1\cdot10^{-8}\,s \Rightarrow c\tau \approx 15.34\,m$

häufiger: $\pi l \nu$

Cronin + Fitch - Experiment (1964) → [Nobel-Preis 1980]

$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S^0\rangle + |K_L^0\rangle)$



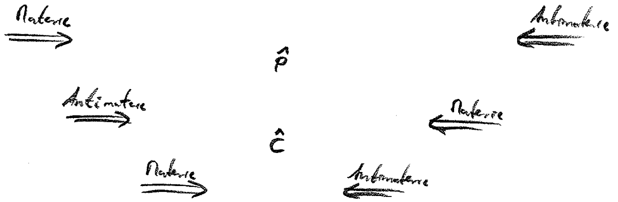
Beobachtung:
22700 Zerfälle
45 davon $\pi^+\pi^-$ oder $\pi^0\pi^0$

((erzeugt durch starke Ww, als EZ der Seltsamkeit ($K^0\bar{K}^0$); Zerfall durch schwache Ww, als EZ von CP ;)) Analogon: Polarisation ; zwei Darstellungen nützlich))

⇒ d.h.: CP wird verletzt !!! "$\cancel{CP}$"

→ also ist die Natur nicht spiegelsymmetrisch !

Relevanz: $\cancel{CP}$ ist wichtig, weil es somit einen grundsätzlichen Unterschied zwischen Materie + Antimaterie gibt!



wird CP verletzt, ist der untere Zustand ungleich dem oberen ; d.h. nach der Paarvernichtung kann es einen Rest geben!

→ wichtige Rolle in der Kosmologie (?!)

kann das SM CP-Verletzung beschreiben? JA!

- die CKM-Matrix hat i.A. komplexe Matrixelemente (vgl. Übg, A.51).
  - → die meisten davon können durch Phasendrehungen der Quark-Felder als reelle Zahlen umdefiniert werden
  - → aber für drei Generationen bleibt mindestens eine Phase übrig.
  - → diese Phase führt zu $\cancel{CP}$ im SM.
- eigentlich hätten die Parameter h_u, h_d etc (vgl. S. 73) auch komplex sein können
  - → im Prinzip können diese Phasen wieder wegdefiniert werden (vgl. Übung, Aufgabe 53), durch sog. "chirale Transformationen"
  - → Bem: in der QFT führen diese Transformationen zu Problemen ("Anomalien"; "starke CP-Verletzung")
  - → jedenfalls ist hier die zweite Möglichkeit zu $\cancel{CP}$ im SM.

weitere Terme in $\hat{\mathcal{L}}_{SM}$

haben nun die wichtigsten Mechanismen kennengelernt, wie oben (S. 66/67) versprochen: $(W^\pm, Z^0, \gamma) \leftrightarrow H$, H-Dynamik, Qu. $\leftrightarrow$ H

in Analogie zur Yukawa (Qu-H) WW bekommen auch die Leptonen ihre Massen:

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -h_1^e\left[\hat{\bar{L}}_{1L}\,\hat{\Phi}\,\hat{e}_R + \hat{\bar{e}}_R\,\hat{\Phi}^\dagger\,\hat{L}_{1L}\right] + 2.+3.\ \text{Gen.}$$

jetzt wieder $\hat{\Phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{0}{v}$:

$$\xrightarrow[\text{quad.}]{\text{SSB}} -\frac{h_1^e v}{\sqrt{2}}\left[\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L\right] + 2.+3.\ \text{Gen.}$$

$$\overset{L+R=1,\ \text{S.S.73}}{\equiv} -m_e\,\bar{e}e + 2.+3.\ \text{Gen.}$$

((und im Prinzip auch $\delta\hat{\mathcal{L}} = -h_1^\nu\left[\hat{\bar{L}}_{1L}\,\hat{\tilde{\Phi}}\,\hat{\nu}_R + h.c.\right] + \dots$)) aber ν_R nicht nötig

Zusammenfassung aller Terme $\hat{\mathcal{L}}_{SM} = \hat{\mathcal{L}}_{stark} + \hat{\mathcal{L}}_{elektroschwach}$
(s. unten, §9)

$$\hat{\mathcal{L}}_{elektroschwach} = \hat{\mathcal{L}}_{Eich} + \hat{\mathcal{L}}_{Higgs} + \hat{\mathcal{L}}_{Fer} + \hat{\mathcal{L}}_{Yuk}$$

---

8. Ideen jenseits des SM

bisher gesehen: Struktur des SM beinhaltet einige willkürliche Festlegungen; es hat viele freie Parameter

Vereinfachungen möglich? → es gibt sicherlich viele Ideen.
hier: ein wichtiges Beispiel

Vereinheitlichung

die erste Teilchen-Generation (vgl. S. 65): $\binom{\nu}{e}_L \; e_R \; \binom{u}{d}_L \; u_R \; d_R$

Anzahl der Freiheitsgrade: 3 Leptonen $+ \; 4 \cdot \underset{\uparrow}{3}$ Quarks $= 15$ ($N_c = 3$ Farben)

die Kernidee (Georgi/Glashow '74): $15 = 5 + 10$

bilde einen Spaltenvektor der SU(5) aus 5 Freiheitsgraden $(\nu_L, e_L, d_R \cdot 3)$

bilde eine antisymm. 5×5-Matrix aus 10 Freiheitsgraden $(e_R, u_L \cdot 3, d_L \cdot 3, u_R \cdot 3)$

der Vorteil:
haben statt 5 verschiedenen Strukturen nur 2
haben statt 3 verschiedenen WW'n nur 1

dies nennt man "große Vereinheitlichung", "GUT" ← grand unified theories

Bem.:
- es gibt viele "größere" Eichgruppen, in deren Repräsentationen die Freiheitsgrade der SU(2)×U(1) untergebracht werden können; populär ist z.B. auch SO(10): 16 Freiheitsgrade, $15 + \nu_R$
- keine der vielen möglichen GUT's ist momentan universell akzeptiert; daher hier: weiter mit SU(5)

was geschieht mit den Eichbosonen (Gluonen, $W^\pm, Z^0, \gamma$) ?

SU(N) hat N^2-1 Parameter → N^2-1 Generatoren T^a ↳ $a = 1, \dots, N^2-1$

also $D_\mu = \partial_\mu - i g_{GUT} \vec{A}_\mu^a T^a$

→ 24 Vektorfelder A_μ^a für $N=5$

↳ 8 Gluonen ← $(N_c^2-1) = 3^2-1$ + $1 W^+ + 1 W^- + 1 Z^0 + 1 \gamma$ = 12

+ 12 "X-Bosonen" ((12 = 4·3 ← Farben, 4 Ladungen $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}$))

↳ neue Teilchen ?!

in der Natur (noch) nicht beobachtet

→ m_X sehr groß!

wie könnten die X-Bosonen eine so hohe Masse bekommen?

→ SSB, genau wie bei $W^\pm, Z^0$?!

nicht ganz; wichtiger Unterschied:

- bei $SU(2)_L$-Brechung bekommen alle Vektorbosonen eine Masse. dies nennt man "vollständige Symmetriebrechung".
- bei SU(5)-Brechung müssen
  - Gluonen, Photon masselos bleiben
  - $W^\pm, Z^0$ "kleine" Massen bekommen
  - X-Bosonen "große" Massen bekommen

dies erfordert eine "partielle Symmetriebrechung"

ergibt sich, wenn das Higgs-Feld nicht als ein 5-komponentiger Spaltenvektor, sondern durch eine spurlose hermitesche 5×5-Matrix dargestellt wird

wie unterscheidet man aber solch ein GUT-Modell vom SM?

→ brauchen experimentell verifizierbare Konsequenzen!

(1) Vereinheitlichung der Eichkopplungen

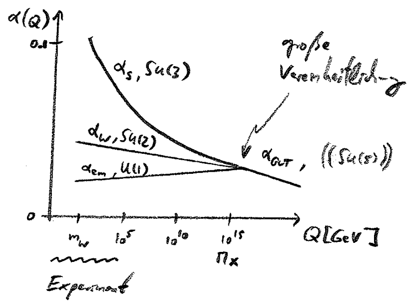
$\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$

haben anstelle von 3 Eichkopplungen ($\alpha_s, \alpha_w, \alpha_{em}$)

jetzt nur eine: α_{GUT}

bei niedrigen Energien: Sy. gebrochen

bei hohen Energien: Sy. sollte wiederhergestellt sein!



Bem.: die Vereinheitlichungs-Skala, $M_X \approx 10^5$ GeV, ist sehr groß!

Gravitationskraft ~ $\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$ ⇒ kann sie bei solch kleinen Abständen immer noch vernachlässigt werden?

Abschätzung: Grav. ist wichtig, wenn Potential ≈ Ruhemasse

$$\frac{\gamma M^2/r}{Mc^2} \approx 1 \quad , \quad r \approx \frac{\hbar}{Mc} \quad \Rightarrow \quad M \approx \sqrt{\frac{\hbar c^5}{\gamma}} \approx 10^{19}\,\text{GeV}$$

↳ "natürliche Längeneinheit" ↳ Planck-Masse

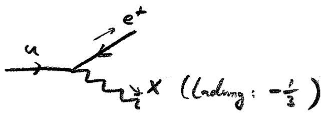
→ Grav. ist wahrscheinlich immer noch ok.

man ist aber bei M_X schon "in der Nähe" der Planck-Masse.

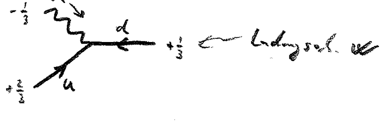
(2) Proton-Zerfall

sehr wichtige GUT-Vorhersage: Proton zerfällt!

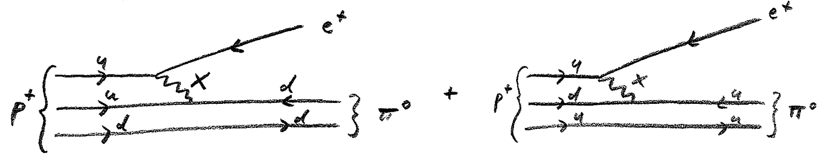
Ursache: Quarks und Leptonen sind im gleichen Vektor; bekommen dann geladene Ströme durch X-Boson-Austausch:



,



dies führt zu der Möglichkeit $p^+ \to e^+ \pi^0 \leftarrow LK(d\bar{d}, u\bar{u})$



Abschätzung der Zerfallsrate für diesen Kanal : s. Übung, Aufg. 56

aber (PDG Booklet) : Lebensdauer des Protons $\tau_p \gtrsim 10^{33}$ Jahre

→ man bekommt untere Grenze für m_X (vgl. Abbildung oben)

→ falls m_{GUT} also endlich ist, sollte dieser Zerfall eines Tages beobachtet werden !

(3) Neutrino - Massen

eine "fundamentale" Theorie muss renormierbar sein.
das gilt jetzt also für die GUT.
das SM ist jetzt eine "effektive Theorie" die nur bei niedrigen Energien die Natur genau beschreibt.

→ können in $\hat{\mathcal{L}}_{SM}$ auch 4-Vertizes mit Fermionen, oder Vertizes mit ≥5 Teilchen unterbringen, wenn diese Operatoren durch die große Skala m_{GUT} unterdrückt sind, so dass sie für $m_{GUT} \to \infty$ verschwinden.

→ wichtiges Bsp : $\delta\hat{\mathcal{L}} = -\frac{h_\nu^2}{m_{GUT}} \hat{\bar{L}}_{1L} \hat{\tilde{\Phi}} \hat{\tilde{\Phi}}^+ \hat{L}_{1L}$ + 2. + 3. Generation

führt zu Massentermen für Neutrinos , s. unten (§ 9)

der obige Massenterm (mit $\hat{L}_{1L} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$) genügt noch nicht [da $\bar{\nu}_L \nu_L = 0$] . Es gibt aber einige Varianten davon (s. z.B. [Cottingham/Greenwood, Kap. 19-21]) ...

Resultat: nach $\hat{\tilde{\Phi}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ bekommen Neutrinos

eine Masse $m_\nu \sim \frac{h_\nu^2 v^2/2}{m_{GUT}}$.

bisher kennen wir die leichtesten / schwersten Fermionmassen als $m_e = \frac{h_e v}{\sqrt{2}} \approx 0.5$ MeV , $m_t = \frac{h_t v}{\sqrt{2}} \approx 175$ GeV

Vermutung : h_ν sollte in diesem Bereich der Yukawakopplungen liegen, also $h_e \lesssim h_\nu \lesssim h_t$

aus Übung, Aufg. 56 : $m_{GUT} \gtrsim 10^{15}$ GeV

also $\frac{(0.5 \text{ MeV})^2}{10^{15} \text{ GeV}} \approx \frac{10^{11} \text{ eV}^2}{10^{24} \text{ eV}} \lesssim m_\nu \lesssim \frac{(175 \text{ GeV})^2}{10^{15} \text{ GeV}} \approx \frac{10^{22} \text{ eV}^2}{10^{24} \text{ eV}}$

$$10^{-13} \text{ eV} \lesssim m_\nu \lesssim 10^{-2} \text{ eV}$$

Experimentelle Bestimmung der Neutrinomassen

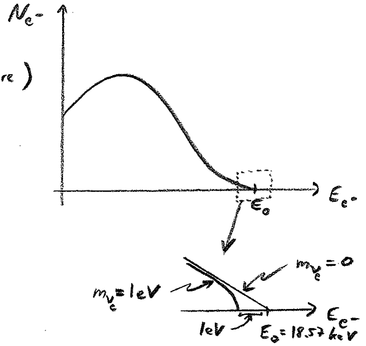
wie kann man so kleine Massen messen ?

(a) direkt

Tritium β- Zerfall ($\tau_{1/2}$ = 12.32 Jahre)

$^3H \to {}^3He + e^- + \bar{\nu}_e$

sehr schwierige Messung !



Mainzer Experiment 1997-2001 :

$m_{\nu_e} < 2.2$ eV

KATRIN (Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment) 2009 - ...

Ziel : $m_{\nu_e} < 0.2$ eV "präziseste Waage der Welt"

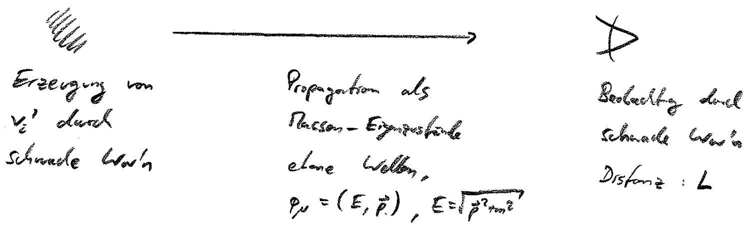
(6) <u>indirekt</u>

Massendifferenzen sind leichter zu messen, da sie zu Neutrino-Oszillationen führen:

in Analogie zu den Quarks sind die in schwachen WW's erzeugten ν's (falls massiv) LK's von Masseneigenzuständen.

(hier: betrachte der Einfachheit halber nur 2 Generationen)

$$\text{schwache EZ} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \nu_1' \\ \nu_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Massen-EZ}$$



Erzeugung von ν_1' durch schwache WW'n

Propagation als Massen-Eigenzustände ebene Wellen, $p_\mu = (E, \vec{p})$, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

Beobachtung durch schwache WW'n Distanz: L

betrachte z.B. Propagation eines ν_1'

$$|\nu_1'(t,L)\rangle = \cos\theta\, |\nu_1\rangle\, e^{-iEt+ip_1L} + \sin\theta\, |\nu_2\rangle\, e^{-iEt+ip_2L}$$

$$\langle \nu_2'| = -\sin\theta \langle \nu_1| + \cos\theta \langle \nu_2|$$

$$\Rightarrow \langle \nu_2' | \nu_1'(t,L)\rangle = \underbrace{\cos\theta \sin\theta}_{=\frac{1}{2}\sin(2\theta)} e^{-iEt} \underbrace{\left(e^{ip_2L} - e^{ip_1L}\right)}_{= e^{i(p_1+p_2)\frac{L}{2}} \underbrace{\left(e^{i(p_2-p_1)\frac{L}{2}} - e^{i(p_1-p_2)\frac{L}{2}}\right)}_{= 2i \sin\left((p_2-p_1)\frac{L}{2}\right)}}$$

$$= i \cdot \sin(2\theta)\, e^{-iEt}\, e^{i(p_1+p_2)\frac{L}{2}} \sin\left((p_2-p_1)\frac{L}{2}\right)$$

also ist die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang

$$P(1' \to 2') = |\langle \nu_2' | \nu_1'(t,L)\rangle|^2 = \sin^2(2\theta) \sin^2\left((p_2-p_1)\frac{L}{2}\right)$$

für $E \gg m_i$ ist $p_i = \sqrt{E^2 - m_i^2} \approx E - \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{E} + O\left(\frac{m^4}{E^3}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{P(1' \to 2') = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\underbrace{\boxed{(m_1^2 - m_2^2)}}_{=\Delta m^2} \frac{L}{4E}\right)}$$

setzen wir nun "typische" Einheiten in den 2. Sinus ein:

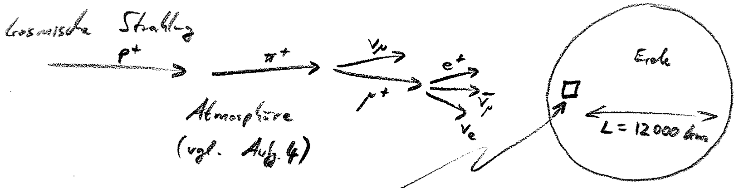
$$\frac{L}{4E}\Delta m^2 = \frac{L[\text{km}]\ \Delta m^2[\text{eV}^2]}{E[\text{GeV}]} \qquad \underbrace{\frac{10^3\text{m} \cdot 10^{-18}\text{GeV}^2}{4 \cdot \text{GeV}}}_{= \frac{1}{4} \text{fm} \cdot \text{GeV} \approx \frac{5}{4} \approx 1.25}$$

→ eine Oszillation kann für $\frac{L}{4E}\Delta m^2 \sim 1$ beobachtet werden; für $E \sim \text{GeV}$ und $\Delta m \ll \text{eV}$ braucht man also $L \gg \text{km}$.

⇒ <u>große</u> Abstände nötig im Experiment!

mehrere Möglichkeiten:

(1) Atmosphärische Neutrinos



ν-Detektor Super-Kamiokande$_{'96-}$ (in stillgelegter Mine, unter den japanischen Alpen; 50 000 Tonnen reines Wasser; Photomultiplier)
11200 Stück
0.5m Durchmesser

ν-Nachweis über Streuung via geladenem Strom:

$\nu_\mu + N \to \mu + N$, $\nu_e + N \to e + N$

geladenes Lepton nachweisbar (Photonen; Cherenkov-Strahlung)

atmosphärische ν's werden auf allen Seiten der Erde erzeugt!

man findet aber: $\frac{\text{Fluß von } \nu_\mu \text{ nach oben}}{\text{/. \quad unten}} = 0.54 \pm 0.04$

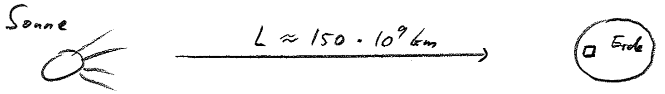
hier: $E \approx$ einige GeV ; $L \approx 12\,000$ km

Interpretation: $\nu_\mu \to \nu_\tau$ Oszillation

$$|m_{\nu_\mu}^2 - m_{\nu_\tau}^2| \approx (2 \pm 1) \cdot 10^{-3}\ \text{eV}^2$$

$$\sin^2\theta_{\mu\tau} > 0.9$$

(2) Sonnen-Neutrinos



Stern der "Hauptreihe"
verbrennt Wasserstoff : Fusion

SNO (Sudbury Neutrino Observatory)
Kanada, '99-

$$4p^+ + 2e^- \to {}^4He^{++} + 2\nu_e + 26.1\ MeV$$
$$^8B \to 2\,{}^4He + e^+ + \nu_e$$

brauchen ν-Fluss an der Quelle (= Kern der Sonne)

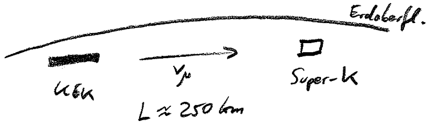
$\to$ "SSM" solar standard model [Bahcall et al, 1963-2005]

$\to$ $E_\nu \sim 0.01 - 10$ MeV ; nur ν_e werden erzeugt

Messung: $\dfrac{Fluss(\nu_e)}{Fluss(\nu_e+\nu_\mu+\nu_\tau)} \approx 0.31 \pm 0.03$

Interpretation: $|m^2_{\nu_e} - m^2_{\nu_\mu}|$ oder $|m^2_{\nu_e} - m^2_{\nu_\tau}| \approx (7 \pm 3) \cdot 10^{-5}\ eV^2$

(3) Beschleuniger-Neutrinos



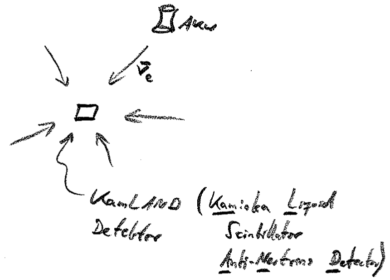
Distanz kleiner als bei (1), also verschwinden weniger als 50% der ν_μ, aber man kann E_ν kontrollieren!

$\to$ viele ähnliche Experimente, z.B. CERN $\to$ Gran Sasso (Italien, 730 km)
Tevatron $\to$ Soudan (USA, 735 km)

(4) Reaktor-Neutrinos

Japan: ~ 50 Kernkraftwerke
Leistungen genau bekannt
ca. 20% der Energie
verschwindet als $\bar{\nu}_e$

Ergebnisse: stimmen mit (2) überein.



1000 Tonnen Scintillations-Flüssigkeit
1879 Photomultiplier, 0.5 m ⌀

Neutrino-Fazit:

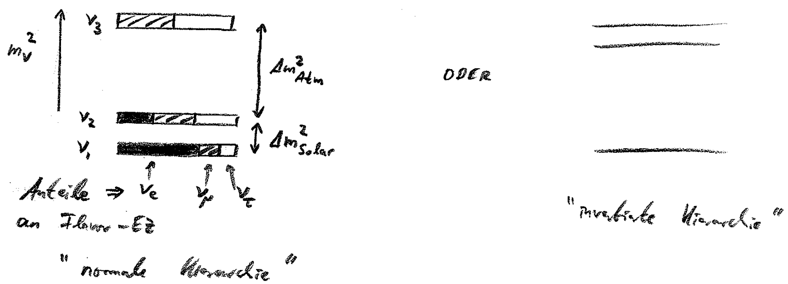
direkte Messung von m_ν sehr schwer:

bisher nur obere Schranken, z.B. $m_{\nu_e} \leq 2.2$ eV

evtl. Erkenntnisse aus Kosmologie / Astroteilchenphysik nützlich, z.B. $\sum_i m_{\nu_i} < 45$ eV (s. z.B. [Fayyazuddin, Introd. To Particle Physics])

Messung von Massendifferenzen durch ν-Oszillation

es ergibt sich das folgende Bild für die Masseneigenzustände ν_i:



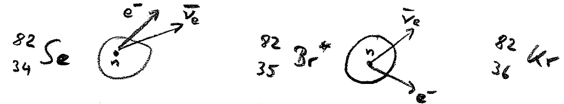
über die Mischungsmatrix weiss man (momentan) auch erst sehr wenig; für $\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix} = U \begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}$ sind $|U_{ij}|$ oben schraffiert.

Jedenfalls ist sie (im Ggs. zu V_{CKM}) überhaupt nicht ≈ diagonal (s. z.B. [Griffiths, §11.5])

interessante Variation: es ist (noch) nicht klar,
ob U mit 3 Mischungswinkeln und 1 Phase (wie V_{CKM})
oder ✗ 3 Phasen
parametrisiert werden muss; im zweiten Fall: $U \sim V_{CKM} \cdot \mathrm{diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, 1)$
wobei α_1, α_2 zusätzliche CP-verletzende Phasen sind,
und für $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ die Neutrinos "Majorana"-Teilchen sind,
also ihre eigenen Antiteilchen: $\bar{\nu} = \nu$

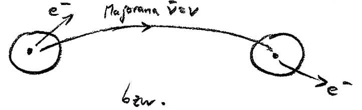
Um zu unterscheiden, ob $\bar{\nu} = \nu$ ist, kann man nach "neutrinolosem doppeltem Betazerfall" experimentell suchen

z.B.:



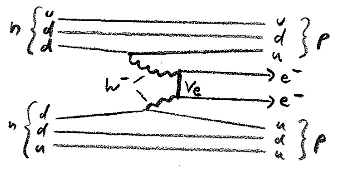
: $2e^- + 2\bar{\nu}_e$

vs.



: $2e^- + 0\nu$

bzw.



→ mehrere Experimente, z.B. Heidelberg-Moskau: $m_{\beta\beta} \approx 0.2-0.5$ eV (sehr umstritten...)
viele andere in Planung / Bau

→ Zerfallsrate $\Gamma \sim |\underbrace{m_i U_{ei}}_{\equiv m_{\beta\beta}}|^2$

Weitere Ideen jenseits des SM

(a) Supersymmetrie

bisher: Symmetrien zw. verschiedenen Zuständen desselben Systems
z.B. Rotationssymmetrie in QM:
Theorie invariant unter $\psi \to R_\theta \psi$
⇔ infinitesimale Version: $\psi + \delta\psi$, $\delta\psi = -i(\delta\vec{\theta}\cdot\vec{S})\psi$

Wess, Zumino (1974): Bosonen + Fermionen ineinander "rotieren"

z.B. Skalarfeld ϕ, Spinorfeld ψ:

$$\delta\phi = 2\underset{\varepsilon^\dagger\gamma^0}{\bar{\varepsilon}}\psi \quad , \quad \delta\psi = -i\varepsilon\underset{\gamma^\mu\partial_\mu}{\not{\partial}}\phi$$

ε: (infinitesimaler) Spinor $((\hat{=}\ \delta\vec{\theta}))$

$$\left(\left(\Rightarrow \delta\phi^* = 2\bar{\psi}\varepsilon , \ \delta\bar{\psi} = i\bar{\varepsilon}\not{\partial}\phi^* \right)\right)$$

kann man eine Theorie konstruieren, die unter dieser Transformation invariant bleibt?
→ viele Möglichkeiten

Bsp freie KG- und Dirac-Theorie mit derselben Masse m

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^*)\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^*\phi + \bar{\psi}i\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi \equiv \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$$

[Griffiths, Problem 12.8: $\Rightarrow \delta\mathcal{L}_1 = (\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\bar{\psi})\varepsilon + \bar{\varepsilon}(\partial^\mu\phi^*)(\partial_\mu\psi)$; $\delta\mathcal{L}_2 = -m^2(\bar{\psi}\varepsilon\phi + \phi^*\bar{\varepsilon}\psi)$;
$\delta\mathcal{L}_3 = -\delta\mathcal{L}_1 + \partial_\mu Q^\mu$; $\delta\mathcal{L}_4 \overset{D\text{-Glg}}{=} -\delta\mathcal{L}_2 + \partial_\mu R^\mu$; $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(Q^\mu + R^\mu) \Rightarrow$ Bwglg invar!]

→ i.A.: Supersymmetrie verbindet Teilchen, deren Spin sich um ½ unterscheidet: Fermions ⇔ Bosons

Bem.
- fundamentale Symmetrie der Natur ?!
- jedes SM-Teilchen hat dann einen "Superpartner"
  z.B. Quark - Squark, Lepton - Slepton, Elektron - Selektron, etc.
  bzw. Photon - Photino, Gluon - Gluino, W - Wino, etc.
- Expt. Nachweis ?! (noch) keine Superpartner gesehen
  ⇒ Masse "groß", Supersymm. muss gebrochen sein
- theor. Motivation: - bessere Vereinheitl. $(\alpha_s, \alpha_w, \alpha_{em}) \to \alpha_{GUT}$
  - Kandidat für "Dunkle Materie": leichtestes SuSy T.

(6) Strings

bisher: SM beinhaltet nur 3 von 4 Ww'n

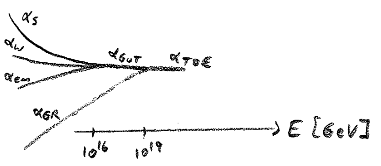
Grund: Theorie der Quantengravitation bisher unbekannt

((Elektrodynamik → QED OK

Allg. Rel. Theorie → QART ⚡, Punktmassen nicht renormierbar))

in einer fundamentalen Theorie, welche auch für hohe Energien ($E \gtrsim M_{Pl} \approx 10^{19}$ GeV) gelten soll, können Gravitations-Effekte nicht mehr vernachlässigt werden.

Schema einer TOE: (Theory Of Everything)



Kernidee: fundamentale Freiheitsgrade: 1-dimensionale "Strings" / Saiten, Fäden

bzw. höher-dim. "Branes" / Branen, Membrane

"Teilchen" nicht 0-dim. Punkte, sondern Anregungen / Vibrationsmoden der Strings

Bem:
- mathematische Konsistenz ("Anomalie-Freiheit") erfordert eine höhere Anzahl von Raum-Dimensionen!

  z.B. bosonische Theorie ⇒ 25 Raum-Dimensionen

  z.B. $\underbrace{\text{bos.} \xleftrightarrow{\text{SuSy}} \text{fer. Theorie}}$ ⇒ 9 oder 10 Raum-Dimensionen

  ↳ "Superstrings"

- beinhaltet "Graviton" ⇒ Kandidat für Quantengravitation
- Extra-Dimensionen müssten "kompaktifiziert" / aufgerollt sein, so dass wir sie in unseren "Niedr.-" Energie-Expt'n nicht wahrnehmen; $9(+1)\,D \to 3(+1)\,D + 6D$ Calabi-Yau

  "M-Theorie": $10(+1)\,D \to 3(+1)\,D + 7D$ G_2

  → Art der Kompaktifizierung ⇒ Teilcheninhalt, Kräfte, ...

  → Problem: viele ($\sim 10^{500}$?) Mögl. / String-Vacua ...
- expt. Tests ?! $M_{Pl} \sim 10^{-35}$ m $\sim 10^{-43}$ s

  → bisher: String-~~Theorie~~ - Struktur / System / Rahmen

9. Zusammenfassung SM

lokale Eichtheorie, $SU(3)_{Color} \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ← Hyperladung

$$\hat{\mathcal{L}}_{SM} \overset{!}{=} \hat{\mathcal{L}}_{stark} + \hat{\mathcal{L}}_{elektroschwach}$$

$$= \hat{\mathcal{L}}_{stark} + \hat{\mathcal{L}}_{Eich} + \hat{\mathcal{L}}_{Higgs} + \hat{\mathcal{L}}_{Fer} + \hat{\mathcal{L}}_{Yukawa} \qquad \text{(vgl. S. 76)}$$

① $\mathcal{L}_{stark}$ QCD SU(3)

$$\mathcal{L}_{stark} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu} + \sum_q \bar{q}_\alpha\, i\gamma^\mu \left[\partial_\mu \delta_{\alpha\beta} + \frac{i g_s}{2} \lambda^a_{\alpha\beta} G^a_\mu\right] q_\beta$$

starke Eichkopplung

$q \in \left\{ \begin{matrix} u & c & t \\ d & s & b \end{matrix} \right\}$

Farbe: $\alpha \in \{r, b, g\}$

Gluonfelder, $a = 1..8 \leftarrow 3^2 - 1$

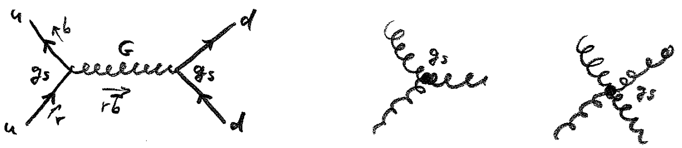
(Gluon-)Feldstärketensor, $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_s \underbrace{f^{abc}} G^b_\mu G^c_\nu$

↳ Zahlen, s.u.

SU(3) Matrizen $\lambda^{1..3} = \begin{pmatrix} \sigma^{1..3} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda^{4..5} = \begin{pmatrix} & \overset{\sigma^{1..2}}{0} & \\ 0 & \odot & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}$, $\lambda^{6..7} = \begin{pmatrix} 0 & 0\ 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \sigma^{1..2} \end{pmatrix}$

$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $[\lambda^a, \lambda^b] = 2i \underbrace{f^{abc}} \lambda^c$

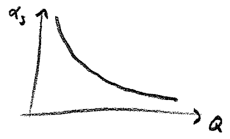
z.B.



Farbladung der Quarks geändert

Ww ist diagonal in Quark-(Massen-)Eigenzuständen

Kopplung $\alpha_S = \frac{g_s^2}{4\pi}$



(vgl. Ü 31)

② $\mathcal{L}_{Eich} = -\frac{1}{4}\underbrace{A^i_{\mu\nu}}A^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}\underbrace{B_{\mu\nu}}B^{\mu\nu}$

Struktur: $[A^2, A^3, A^4]$

$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ ← U(1) Eichfeld

$A^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - g_w\,\varepsilon^{ijk} A^j_\mu A^k_\nu$

↖ SU(2) Eichfeld, $i = 1..3$ ((später: $B + A^3$ mischen in γ, Z^0))

↖ SU(2) Eichkopplung

③ $\mathcal{L}_{Higgs} = (\underline{D_\mu \Phi})^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi)$, $\Phi = \begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}$ komplexes Skalarfeld

$[A^2, A^2H, \varsigma, H^2, H^3, H^4]$

$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig_w}{2}\sigma^i A^i_\mu - ig_Y Q_Y B_\mu$

↖ Hyperladung ; $Q_Y = -\frac{1}{2}$ für Φ

↖ U(1) Eichkopplung

Higgs-Potential $V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$

$\mu^2 > 0,\ \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad$ SSB

④ $\mathcal{L}_{Fer} = \sum_{i=1}^{3} \Big\{ \bar{Q}'_{iL}\, i\gamma^\mu\big[\partial_\mu - \frac{ig_w}{2}\vec{\sigma}\vec{A}_\mu - ig_Y(-\frac{1}{6})B_\mu\big] Q'_{iL}$

$[f^2, f^2A]$ Generationen

$+ \bar{L}'_{iL}\, i\gamma^\mu\big[\partial_\mu - \frac{ig_w}{2}\vec{\sigma}\vec{A}_\mu - ig_Y(\frac{1}{2})B_\mu\big] L'_{iL}$

$+ \sum_{l_i} \bar{l}''_{iR}\, i\gamma^\mu\big[\partial_\mu - ig_Y Q^l_Y B_\mu\big] l''_{iR} \Big\}$

↖ $l_i \in \{u_i, d_i, e_i, (\nu_i)\}$; $Q^{l_i}_Y = \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\}$

mit $Q'_{iL} = \begin{pmatrix}u'_i\\ d'_i\end{pmatrix}_L$, $L'_{iL} = \begin{pmatrix}\nu'_i\\ e'_i\end{pmatrix}_L$

Quark-Farb-Indizes hier unterdrückt: alles diagonal $\Rightarrow \sum_\alpha$

⑤ $\mathcal{L}_{Yukawa} = -\sum_{i,j=1}^{3} \Big\{ \Gamma^u_{ij}\, \bar{Q}'_{iL}\, \tilde{\Phi}\, u''_{jR} + \Gamma^d_{ij}\, \bar{Q}_{iL}\, \Phi\, d''_{jR}$

$[f^2, f^2H]$ Generationen

$+ \Big(\Gamma^\nu_{ij}\, \bar{L}'_{iL}\, \tilde{\Phi}\, \nu''_{jR}\Big) + \Gamma^e_{ij}\, \bar{L}'_{iL}\, \Phi\, e''_{jR} \Big\} + h.c.$

mit $\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix}\phi^{0*}\\ \phi^{+*}\end{pmatrix} = i\sigma^2\Phi^*$

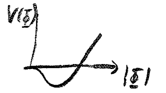
$\mathcal{L}_{SM}$ ist nun spezifiziert.

müssen nun etwas "Buchhaltung" betreiben:

SSB im Higgs-Sektor → Massenterme

Identifikation der Massen-Eigenzustände → Mischungsmatrizen

Erinnerung: (s. S. 71) SSB,



, $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 + \phi_2 + i\phi_1\\ v + \phi_0 - i\phi_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\vec{\sigma}\vec{\phi}}{v}}\Big(\begin{matrix}0\\ v+\phi_0\end{matrix}$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + H(x)\end{pmatrix}$ "unitäre Eichung"

③' $\Rightarrow \mathcal{L}_{Higgs} = m_w^2 W^{+\mu} W^-_\mu \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 + 0 \cdot Q^\mu Q_\mu$

$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - \Big[\underbrace{-\frac{1}{4}\lambda v^4} + \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4\Big]$

↖ Minimum des Higgs-Potentials. Konstante.
irrelevant im SM; problematisch mit Gravitation!
(("kosmologische Konstante", aber viel größer
und mit anderem Vorzeichen als beobachtet))

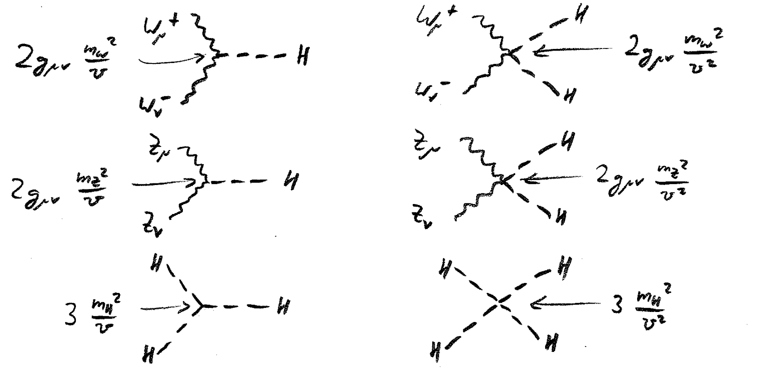
wobei $W^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1 \mp iA^2)$; $Z \equiv \sin(\theta_w) B + \cos(\theta_w) A^3$

Photon $Q \equiv \cos(\theta_w) B - \sin(\theta_w) A^3$

schwacher Mischungswinkel $\tan(\theta_w) = \frac{g_Y}{g_w} \Rightarrow \sin^2\theta_w = 1 - \frac{m_w^2}{m_Z^2}$

$m_w \equiv \frac{g_w v}{2}$, $m_Z \equiv \frac{\sqrt{g_w^2 + g_Y^2}\, v}{2} = \frac{m_w}{\cos(\theta_w)}$

bzw

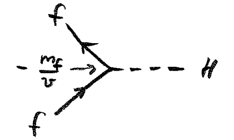


⑤′ $\Rightarrow \mathcal{L}_{Yukawa} = -\sum_f m_f \bar{\psi}_f \psi_f \left(1 + \frac{H}{v}\right)$

Fermionen ↗ ; ↖ Masson-Eigenzustände der Fermionen

Erinnerung: benötigt werden 3x3 Mischungsmatrizen zur Diagonalisierung, vgl. S. 73/74

bzw.



Fermionen koppeln an Higgs mit Stärke $\frac{m_f}{v} = \frac{g_W m_f}{2 m_W}$

→ sehr schwache Kopplung, bis auf Top-Quark + Higgs!

④′$_a$ $\Rightarrow \mathcal{L}_{Fer} \ni \mathcal{L}_{gel.\,Strom} = -\frac{g_W}{\sqrt{2}}\left[J_+^\mu W_\mu^- + \underbrace{(J_+^\mu)^\dagger}\, W_\mu^+\right]$

geladener Strom (vgl. S. 59)

$$= \sum_D \bar{D}_L \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_L \quad , \quad D_L \in \{Q'_{iL}, L'_{iL}\} \ , \ i = 1..3^{te}\ \text{Gen.}$$

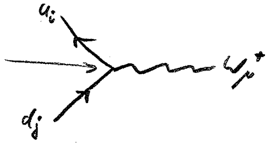
falls ν massiv, Dirac

$$= (\bar{u}\,\bar{c}\,\bar{t})\,\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \underbrace{V_{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_e\,\bar{\nu}_\mu\,\bar{\nu}_\tau)\,\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} V_\ell \begin{pmatrix} e^- \\ \mu^- \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

(V-A)-Form

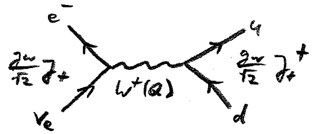
$$= \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} , \quad |V_{CKM}| \approx \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda \approx \sin\theta_c \approx 0.22$$

bzw. $\frac{g_W}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} V_{ij}^{CKM}$ →

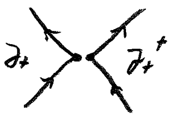


Bem.: Im Limes $Q^2 \ll m_W^2$ erhält man das Fermi-Modell (vgl. S. 57):

$$\mathcal{L}^{eff.}_{gel.\,Strom} = -\boxed{2\sqrt{2}G_F}\, J_+^\mu (J_{+\mu})^\dagger \qquad 2\sqrt{2}G_F = \frac{g_W^2}{2m_W^2} = \frac{2}{v^2}$$



$\xrightarrow{Q^2 \ll m_W^2}$ $2\sqrt{2}G_F J_+$



④′$_b$ $\Rightarrow \mathcal{L}_{Fer} \ni \mathcal{L}_{QED} = -e\,\underbrace{J^\mu_{em.}}\, Q_\mu$

$e = \frac{g_W g_Y}{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}} = g_Y \cos\theta_W = g_W \sin\theta_W$

↖ Photon $= \cos\theta_W B_\mu - \sin\theta_W A_\mu^3$

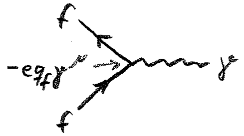
el.mag. Strom $= \sum_{i=1}^{3} \left\{ \frac{2}{3}\bar{u}_i \gamma^\mu u_i - \frac{1}{3}\bar{d}_i \gamma^\mu d_i - \bar{e}_i \gamma^\mu e_i \right\}$

Generationen

hat dieselbe Form für schwache und Massen-EZ

((da die mischenden Fermionen die gleiche Ladung haben))

bzw.



, eq_f = Ladung von f

④′$_c$ $\Rightarrow \mathcal{L}_{Fer} \ni \mathcal{L}_{neutr.\,Strom} = -\frac{g_W}{2\cos\theta_W}\,\underbrace{J_0^\mu}\, Z_\mu$

↖ $\sin\theta_W B_\mu + \cos\theta_W A_\mu^3$

neutraler Strom (vgl. S. 60)

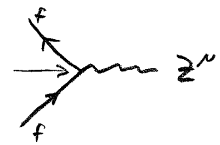
$$= \sum_D \bar{D}_L \begin{pmatrix} \gamma^\mu (c_V^u + c_A^u \gamma^5) & 0 \\ 0 & \gamma^\mu (c_V^d + c_A^d \gamma^5) \end{pmatrix} D_L$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left\{ \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL} - \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL} + \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} - \bar{e}_{iL} \gamma^\mu e_{iL} \right\}$$

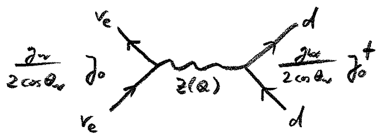
$$-2\sin^2\theta_W J^\mu_{em.}$$

hat wieder dieselbe Form für schwache und Massen-EZ

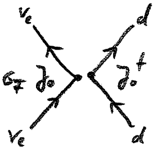
bzw. $-\frac{g_W}{2\cos\theta_W} \gamma^\mu (c_V^f + c_A^f \gamma^5)$ →



Bem.: wieder $Q^2 \ll m_Z^2 \Rightarrow \mathcal{L}^{eff.}_{neutr.\text{-}Strom} = -2\sqrt{2}G_F J_0^\mu (J_{0\mu})^\dagger$



$\xrightarrow{Q^2 \ll m_Z^2}$ $2\sqrt{2}G_F J_0$

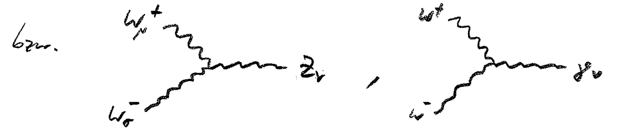


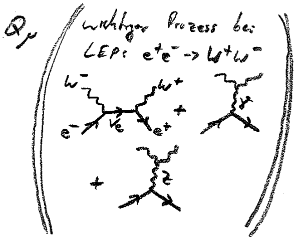
$$\left(\left(\frac{g_W^2}{4\cos^2\theta_W m_Z^2} = \frac{g_W^2}{4 m_W^2} = \sqrt{2}G_F \quad ; \quad \text{Faktor } 2\ ? \right)\right)$$

$$②'_a \Rightarrow \mathcal{L}_{Eich} \ni \mathcal{L}_{A^3} = -ig_w\{(\partial_{\mu_1}A^3_{\mu_2})W^+_{\mu_3}W^-_{\mu_4} + A^3_4(\partial_1 W^+_2)W^-_3 + A^3_3\, W^+_4(\partial_1 W^-_2)\}[g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} - g^{14}g^{23}]$$

$$A^3_\mu = \cos\theta_w Z_\mu - \sin\theta_w Q_\mu$$

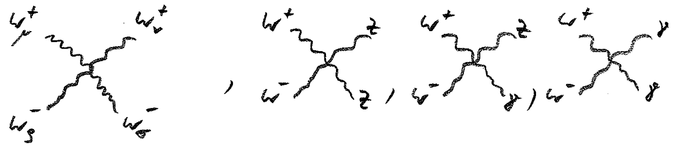
bzw.




wichtiger Prozess bei LEP: $e^+e^- \to W^+W^-$

$$②'_b \Rightarrow \mathcal{L}_{Eich} \ni \mathcal{L}_{A^4} = \frac{g_w^2}{4}\{W^+_{\mu_1}W^+_{\mu_2}W^-_{\mu_3}W^-_{\mu_4} - 2W^+_1W^-_2A^3_3A^3_4\} * [2g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} - g^{13}g^{24} - g^{14}g^{23}]$$

bzw.



→ haben nun alle $\mathcal{L}_w$-Terme explizit aufgeschrieben.

was bleibt ? restliche quadratische Terme: ((in "Feynman-Eichung", $\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu Q^\mu)^2$))

- $②'_c \Rightarrow \mathcal{L}_{Eich, A^2} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu)(\partial^\mu W^\nu_- - \partial^\nu W^\mu_-) - \frac{1}{2}(\partial_\mu Q_\nu)^2$
- $④'_d \Rightarrow \mathcal{L}_{Fer, f^2} = \sum_f \bar{\psi}_f\, i\gamma^\mu\partial_\mu \psi_f$

→ freie Parameter des SM : messen ! (s. PDG) ; verstehen ?? (s. BSM)

wir können sie hier zumindest zählen :

(3 Teilchen-Generationen)

2	:	g_s, θ ; 2 Parameter der starken $\mathcal{L}_w$
$3\cdot(2+1)$	:	m_u, m_d, m_e + 2.+3. Gen. ; 9 Fermion-Massen
4	:	g_w, g_Y, v, λ ; 4 Kopplungen aus elektroschwach + Higgs Sektor
$(3-1)^2$	:	4 Parameter in V_{CKM}
$3\cdot1$	:	m_{ν_e} + 2.+3. Gen ; 3 Neutrino-Massen
$(3-1)^2$	:	4 Parameter in V_ℓ ((falls Majorana : +2 Phasen))

26 zuviele ?!↯ (beschreibt tausende hochpräzise Experimente!)

... und jetzt ?

Ausblick / Herausforderungen / offene Fragen

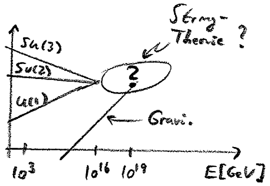
- Majorana ($\bar\nu = \nu$) vs. Dirac-Neutrinos ?
  → experimentell beantworten ! $0\nu2\beta$-Zerfall ; selten : $\tau \sim 10^{26}$ Jahre
- SUSY (Supersymmetrie) ?
  theor. Argument : Teilchenmassen ändern sich durch Schleifen-Quantenkorrekturen
  Skalarfeld (Higgs) : $m_H \xrightarrow{\text{Schleifen}} 10^{16}$ GeV ?! H---$\overset{t}{\bigcirc}$---H
  fordere Symmetrie ! Bos ↔ Fer , H---$\overset{\tilde{t}}{\bigcirc}$---H $\tilde{t}$ ← "stop" } Summe = 0
- (Kein) Higgs ? $\Delta\hat{\mathcal{L}}_{SM}$? GUT-, SUSY-, ...-Teilchen entdecken ?

aktuell :
SLAC (USA), KEK (Japan) : B-Physik
Fermilab (USA) : 1+1 TeV $p\bar{p}$; Higgs-Suche
Brookhaven (USA) : $\frac{100\,\text{GeV}}{\text{Nukleon}}$ Au+Au ; QCD-Materie

LHC (CERN, Sui) : 3.5+3.5 TeV p+p (später: 7+7 TeV)
Ø 8.5 km : 3+3 $\frac{\text{TeV}}{\text{Nukleon}}$ Pb+Pb

zukünftig (?) : ILC [International Linear Collider] : 1 TeV $e^+ + e^-$, Länge 30 km
VLHC [Very Large Hadron Collider] : 60 TeV p+p , Ø 20 km
Muon-Collider , $\mu^+ + \mu^-$ ∂ 1 TeV
...

- BSM. woher kommen die 4 Kräfte ?
  warum sehen wir die verschiedenen Teilchen ?
  woher kommen deren Massen und Ladungen ?
  warum leben wir in 4D ?
  was ist die Struktur von Raumzeit + Gravi. ?
  ↳ [Vorlesung : SS]



- Gravi-Expt. : Gravitations-Wellen ! z.B. LISA (NASA, ESA) , ≳ 2018 [Shuttle?]
  (5 M km Interferometer

[Vorlesung : SS] ↘
- Kosmologie / Astroteilchenphysik
  "Kosmol. Standard-Modell" ((konsistente Beschreibung aller Beobachtungsdaten))
  Energie-/Massen-Dichte des Universums { ≈ 5% "normale" Materie ; ≈ 25% "dunkle" Materie ← { "sieht" man nur via Gravi. ; ν's : ≲ 1% ; → WIMPs ? Neutralinos ? (SUSY) } ; ≈ 70% "dunkle Energie" }

wie geht es konkret weiter ?

- Theorie : Quantenfeldtheorie ! [Vorlesung : SS ; Master]
- Teilchenphysik - Prüfungen : Termin mit VS absprechen
  [7.2. - 11.2.
  17.2. - 25.3.
  PDG - Booklet mitbringen
- BA - Arbeiten
- Bewerbung für Auslandsemester etc
  DAAD, Fulbright, Erasmus, ... [Info : International office DO]