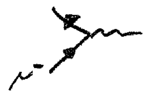
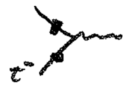
Einschub: mehr zum magnetischen Moment der Leptonen

(s. S. 36/37); magn. Moment der anderen Leptonen verschieden von μ_e?

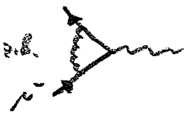
Masse $(e^-, \mu^-, \tau^-) \approx (0.511,\ 105.7,\ 1780)$ MeV

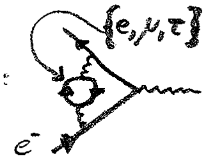
1. Ordnung:  $\Rightarrow \mu_e = \frac{e}{2m_e} \equiv \mu_B$, $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1$ (in 1. Ordn.)

also  $\Rightarrow \mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu}$,  $\Rightarrow \mu_\tau = \frac{e}{2m_\tau}$

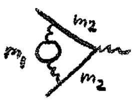
3. Ordnung: wichtigstes Diagramm  $\Rightarrow$ Korrektur $\frac{\delta\mu_e^{(1)}}{\mu_B} = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi}$

((diese Korrektur kommt vom Schleifenintegral (vgl. Regel 5), in dessen Integrand die Propagatoren (vgl. Regel 3) stehen. Propagatoren enthalten Massen (hier: m_e), da als Korrektur (zu $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1$) aber dim.-lose Zahl herauskommen muss, kann das Ergebnis nicht von m_e abhängen $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_{EM}}{\pi}$))

also z.B.  $\Rightarrow$ Korrektur $\frac{\delta\mu_\mu^{(1)}}{e/2m_\mu} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi} = \frac{\delta\mu_\tau^{(1)}}{e/2m_\tau}$!

5. Ordnung: wichtigstes Diagramm:  $\Rightarrow \frac{\delta\mu_e^{(2)}}{\mu_B} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \sum_{i \in \{e,\mu,\tau\}} a\left(\frac{m_i}{m_e}\right)$

((wobei die Korrektur vom Zwei-Schleifenintegral kommt:

 $\sim a\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ muß wieder Zahl sein, kann also nur vom Verhältnis der Massen abhängen

dieses Integral ist berechnet [Li/Mendel/Samuel, PRD 47 (1993) 1723]

wobei z.B. $a(1) = \frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} \approx 0.016$

$a(\varepsilon) = -\frac{1}{3}\ln(\varepsilon) - \frac{25}{36} + O(\varepsilon)$; $a\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \approx a\left(\frac{1}{207}\right) \approx 1.08$

$a\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon^2}{45} + O(\varepsilon^4)$; $a\left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right) \approx a(17) \approx 7.7 \cdot 10^{-5}$))

(Fazit: Schleife mit dem leichtesten Teilchen, hier: e^-, gibt den größten Beitrag)

also

$$\frac{\delta\mu_e^{(2)}}{e/2m_e} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \left[a(1) + a(207) + a(3483) \right] \approx 0.016 + 5.2\cdot 10^{-7} + 1.8\cdot 10^{-9}$$

$$\frac{\delta\mu_\mu^{(2)}}{e/2m_\mu} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \left[a\left(\frac{1}{207}\right) + a(1) + a(17) \right] \approx 1.08 + 0.016 + 7.7\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\delta\mu_\tau^{(2)}}{e/2m_\tau} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \left[a\left(\frac{1}{3483}\right) + a\left(\frac{1}{17}\right) + a(1) \right] \approx 2.02 + 0.25 + 0.016$$

Anwendung: Mott- und Rutherford-Formel

$m_\mu \approx 106\ \text{MeV} \gg m_e \approx 0.511\ \text{MeV}$

$\rightarrow$ betrachte den Grenzwert $m_\mu \to \infty$

((CMS $\approx$ Laborsystem; das Myon ruht, Rückstoß vernachlässigbar))

$$p_1 = (E_1, \vec p_1)\ ,\quad p_2 = (E_2, -\vec p_1) = m_\mu\left(\sqrt{1+\frac{\vec p_1^{\,2}}{m_\mu^2}},\ -\frac{\vec p_1}{m_\mu}\right) \approx (m_\mu, \vec 0)$$

$$q_A = (E_A, \vec q_A),\quad q_B = (E_B, -\vec q_A) = m_\mu\left(\sqrt{1+\frac{\vec q_A^{\,2}}{m_\mu^2}},\ -\frac{\vec q_A}{m_\mu}\right) \approx (m_\mu, \vec 0)$$

E-Erhaltung: $E_A + m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right) \overset{!}{=} E_1 + m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right) \Rightarrow \vec q_A^{\,2} = \vec p_1^{\,2}$

nach Ausführen der Phasenraumintegration hatten wir (s. S. 32) erhalten:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2}\underbrace{\frac{|\vec p_1|}{|\vec q_A|}}_{=1 \text{ wegen E-Erhaltung}}\frac{|M|^2}{(E_A+E_B)^2}$$

nun das Ergebnis für $\langle |M|^2\rangle$ von S. 39 einsetzen

hier:
$$(q_A-p_1)^2 = (\cancel{E_A-E_1})^2 - (\vec q_A-\vec p_1)^2 = -2\vec q_A^{\,2}(1-\cos\theta) = -4\vec q_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$q_A\cdot q_B = p_1\cdot p_2 = q_A\cdot p_2 = q_B\cdot p_1 = m_\mu E_A$$

$$q_A\cdot p_1 = E_A E_1 - \vec q_A\vec p_1 = m_e^2 + \vec q_A^{\,2} - \vec q_A^{\,2}\cos\theta = m_e^2 + 2\vec q_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$q_B\cdot p_2 = m_\mu^2$$

$$E_A+E_B = m_\mu\left(\frac{\sqrt{m_e^2+\vec q_A^{\,2}}}{m_\mu}+1\right) \approx m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{m_\mu^2}\frac{8e^4}{\left(-4\vec q_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}\left(2m_e^2m_\mu^2 + 2m_\mu^2\vec q_A^{\,2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

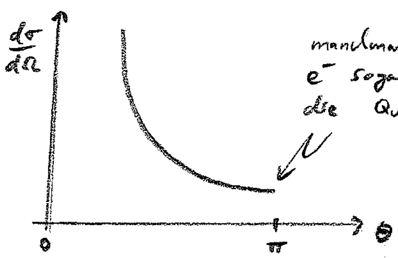
$$= \left(\frac{\alpha_{EM}}{2\vec q_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2\left(m_e^2+\vec q_A^{\,2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{"Mott-Formel"}$$

s. auch Ü29

Bem: • ist gute Näherung für e-p-Streuung, da $m_p \approx 938\ \text{MeV} \gg m_e$

falls das Elektron nichtrelativistisch ist (also $|\vec q_A| = m_e v \ll m_e$), ergibt sich die "Rutherford-Formel":

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{2mv^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2$$



manchmal streuen die e^- sogar zurück in die Quelle

5. Starke Wechselwirkungen, Quantenchromodynamik (QCD)

Im letzten Kapitel: QED, Theorie der elektromagnetischen Ww'en.

konvergiert sehr gut ($\alpha_{em} \approx \frac{1}{137}$)

experimentell extrem genau verifiziert (z.B. μ_e)

→ "langweilig"

Jetzt: komplexere Ww'en

viele verschiedene Näherungsmethoden, neue Begriffe

→ "interessant"

Behandlung hier jedoch nur qualitativ.

Einheitsladung: e (Positron)

QED ≙ Ww geladener T.; Vermittlung: Photonen; Stärke: $g_e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}}$

QCD ≙ Ww farbiger T.; Vermittlung: Gluonen; Stärke: $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$

Farb-Einheitsladung

Quarkmodell

historisch: 1959-64; Gell-Mann, Ne'eman, Zweig

siehe [O.W. Greenberg, Am. J. Phys. 50 (1982) 1074]

leichte Quarks: u ($m \approx 2$ MeV), d (≈ 5 MeV), s (≈ 100 MeV)

schwere Quarks: c ($m \approx 1.25$ GeV), b (≈ 4.2 GeV), t (≈ 174 GeV)

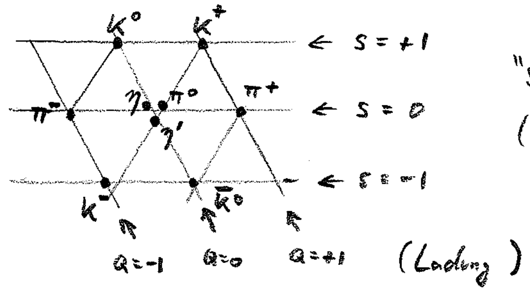
durch Beobachtung der leichtesten Hadronen (Mesonen mit Spin $J=0,1,..$ bzw Baryonen mit Spin $J=\frac{1}{2},\frac{3}{2},..$) kann man etwas über die leichten Quarks erfahren!

Klassifizierung durch Gell-Mann ("der Mendelejew der Teilchenphysik")

$J=0$ - Mesonen:

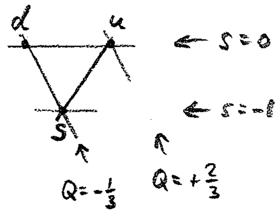
"der achtfache Weg"

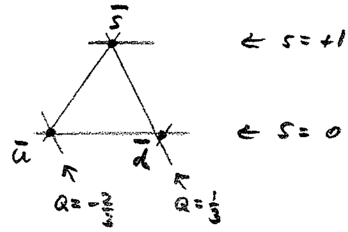
((η' schwerer als andere 8))



"Strangeness"
(Seltsamkeit)

<u>Systematik:</u> Meson = Quark + Antiquark

qu: 

$\bar{q}u$: 

alle Kombinationen $\Rightarrow$ $3 \cdot 3 = 9$ Mesonen !

[Gruppentheorie: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, $1 \equiv \eta'$]

funktioniert nicht nur für Spin-0 ($\uparrow\downarrow$, s.o.)

sondern auch für Spin-1 Mesonen ($\uparrow\uparrow$), Spin-$\frac{1}{2}$ Baryonen ($\uparrow\uparrow\downarrow$),

Spin-$\frac{3}{2}$ Baryonen ($\uparrow\uparrow\uparrow$)

<u>Bestätigung</u> des Quarkmodells: experimentell!

es "fehlte" eine Ecke im Baryondekuplett (das Ω^-, sss).

1964 experimentell entdeckt.

((vgl. Mendelejew: es "fehlten" Gallium, Scandium, Germanium in seinem Periodensystem $\rightarrow$ Vorhersage !))

<u>Fragen</u>
- warum sieht man keine <u>freien</u> Quarks?
- steht z.B. sss nicht im Widerspruch zum Pauli-Prinzip?

$\rightarrow$ neue Eigenschaft: <u>Farbe</u>.

Quarks haben drei Farben / Antifarben ((nehmen wir r, g, b / $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$)) [rot/grün/blau]

als freie Teilchen treten nur <u>farblose</u> Kombinationen auf

dies ist Hypothese! braucht wieder experimentelle Bestätigung.

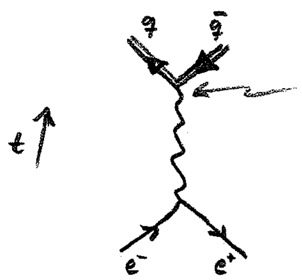
$\rightarrow$ studiere innere Struktur der Hadronen.

Hadronerzeugung in e^+e^--Kollisionen

Quarks sind (el.) geladen (s.o.)

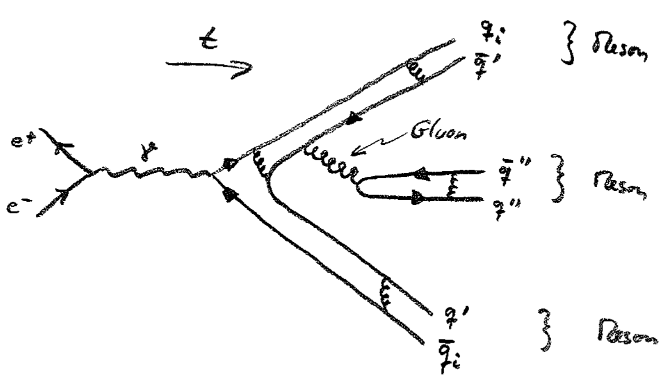
$\rightarrow$ spüren em. WW, $\hat{=}$ QED

Idee: $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q\bar{q}$



an diesem Vertex Ladung $-\frac{1}{3}e$ bzw $+\frac{2}{3}e$ benutzen genauer:

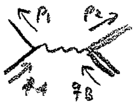
[z.B. SLAC, LEP]

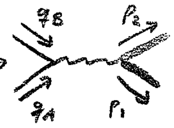


können die **erste** Stufe dieses Prozesses mit den QED-Regeln aus Kapitel 4 berechnen, analog zu "$e^+ + e^- \to \gamma \to \mu^+ + \mu^-$":

wähle CMS, $E \equiv$ Energie des einl. e^-

$Q_i \equiv$ Ladung des q_i (in Einheiten von e), $m_i \equiv$ Masse des q_i

((S. 37-39: $t\uparrow$ 

, jetzt: $\xrightarrow{t}$ 

, also $p_1 \leftrightarrow -q_B$))

$$\Rightarrow \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \overset{(S.39)}{=} \sum_{\substack{\text{Farben}\\ \text{Flavors } i}} \frac{8 Q_i^2 e^4}{(q_A+q_B)^4} \left\{ q_A\cdot p_1\, q_B\cdot p_2 + q_A\cdot p_2\, p_1\cdot q_B + m_i^2\, q_A\cdot q_B + m_e^2\, p_1\cdot p_2 + 2 m_e^2 m_i^2 \right\}$$

CMS: $\vec q_B = -\vec q_A$, $\vec p_2 = -\vec p_1$

E-Erhaltung: $2E = E_1 + E_2 = 2E_1 \Rightarrow E_A = E_B = E_1 = E_2 = E$

$\vec q_A^{\,2} + m_e^2 = \vec p_1^{\,2} + m_i^2$

$$= \sum \frac{8 Q_i^2 e^4}{(2E)^4} \left\{ (E^2 - \vec q_A \vec p_1)^2 + (E^2 + \vec q_A \vec p_1)^2 + m_i^2 (E^2 + \vec q_A^{\,2}) + m_e^2 (E^2 + \vec p_1^{\,2}) + 2 m_e^2 m_i^2 \right\}$$

$$= \sum \frac{Q_i^2 e^4}{E^4} \left\{ E^4 + m_e^2 E^2 + m_i^2 E^2 + (E^2 - m_e^2)(E^2 - m_i^2) \cos^2\theta \right\}$$

$\sphericalangle\, \vec q_A, \vec p_1$

also folgt insgesamt für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta}_{\int_{-1}^{1} du,\ u = \cos\theta} \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{\sqrt{E^2 - m_i^2}}{\sqrt{E^2 - m_e^2}} \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{(2E)^2}\, \Theta(E - m_i)$$

$$= \sum_{\substack{\text{Farben}\\ \text{Flavors } i}} \frac{\pi}{3} \frac{Q_i^2 \alpha_{em}^2}{E^2} \frac{\sqrt{1 - m_i^2/E^2}}{\sqrt{1 - m_e^2/E^2}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_e^2}{E^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{E^2}\right) \Theta(E - m_i)$$

$$\approx N_c \cdot \sum_i Q_i^2 \cdot \frac{\pi}{3} \left(\frac{\alpha_{em}}{E}\right)^2 \qquad \text{für } E \gg m_i \gg m_e$$

$N_c \equiv \sum_{\text{Farben}}$