Formulierung der QED: $\boxed{\hat{\mathcal{L}}_I = e\,\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu \hat{A}_\mu \hat{\psi}}$

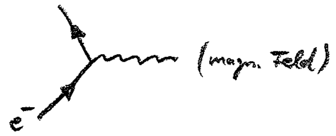
Elementarladung

besser zu merken: Feinstrukturkonstante $\alpha_{EM} \overset{\text{nat.}}{=} \frac{e^2}{4\pi} \overset{SI}{=} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137.035999\ldots}$

$\Rightarrow$ Vertex :  $\Rightarrow$ $\delta M = ie\gamma^\mu$

können nun Feynman-Diagramme der wichtigsten Prozesse malen:

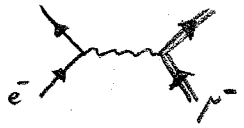
Prozess erster Ordnung

$t\uparrow$ 

magnetisches Moment des e^-

$\mu_e/\mu_B = 1$

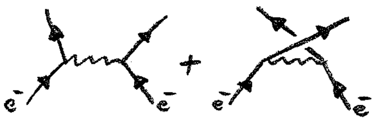
elastische Prozesse zweiter Ordnung



Elektron-Myon-Streuung : $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$

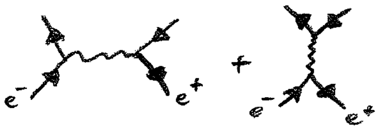
"Mott-Streuung" : $m_\mu \to \infty$

"Rutherford-Streuung" : $v_e \to 0$ $\quad$ (($e^- + p^+ \to e^- + p^+$))



Elektron-Elektron-Streuung : $e^- + e^- \to e^- + e^-$

"Møller-Streuung"



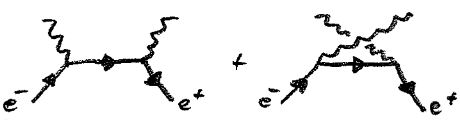
Elektron-Positron-Streuung : $e^- + e^+ \to e^- + e^+$

"Bhabha-Streuung"

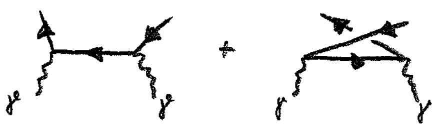
Elektron-Photon-Streuung : $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$

"Compton-Streuung"

inelastische Prozesse zweiter Ordnung

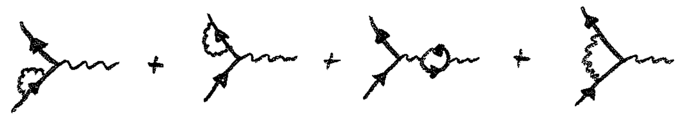


Paarvernichtung : $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$



Paarerzeugung : $\gamma + \gamma \to e^- + e^+$

wichtigster Prozess dritter Ordnung



"Strahlungskorrekturen" zum magn. Moment des e^-
oder: "anomales" magn. Moment des e^-

((grobe Abschätzung der Größenordnung dieser Korrekturen:

2 neue Vertizes $\rightsquigarrow e^2$. jede "Schleife" gibt $\frac{1}{(4\pi)^2}$

$$\rightarrow \frac{e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha_{EM}}{4\pi} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 137} \approx \frac{1}{1720} \quad ?$$

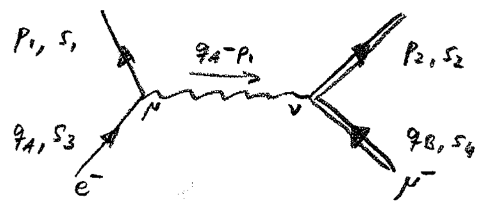
die genaue Antwort ist $\frac{\alpha_{EM}}{2\pi} \approx \frac{1}{861} \approx 0.0011617..$

vgl. mit (s.o.) $\mu_e/\mu_B = 1.0011596..$ (exp.) !))

etc... Teilchenphysik als "Puzzlespiel" mit Feynmangraphen !

Nun können wir aber mit Hilfe der Feynman-Regeln (s. § 3.3) die Amplituden berechnen.

Bsp: Amplitude für e-μ-Streuung



zur Anwendung der Feynman-Regeln: jede Fermionlinie "rückwärts" verfolgen

$$\mathcal{M} = \underset{\substack{1\\ \text{ausl. } e^-}}{\bar{u}(\vec{p}_1, s_1)}\ \underset{\substack{2\\ \text{Vertex}}}{ie\gamma^\mu}\ \underset{\substack{1\\ \text{einl. } e^-}}{u(\vec{q}_A, s_3)}\ \underset{1}{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}\ \underset{2}{ie\gamma^\nu}\ \underset{1}{u(\vec{q}_B, s_4)}\ \underset{\substack{3\\ \text{Photon}\\ \text{Propagator}}}{\frac{-ig_{\mu\nu}}{(q_A - p_1)^2}}\ \underset{\substack{7\\ \text{Gesamtphase}}}{(+i)}$$

$$= -\frac{e^2}{(q_A - p_1)^2}\, \bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A, s_3)\ \bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B, s_4)$$

Bem: • für gegebene $\vec{p}, \vec{q}, s_i$ ist dies eine Zahl !

• falls es mehrere Diagramme gleicher Ordnung gibt: Addition/Subtraktion (Regel 6), z.B.

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1 \pm \mathcal{M}_2|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 \pm (\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^*)$$

letzter Term: repräsentiert sog. Interferenz !

Behandlung der Spinabhängigkeit:

Annahme ($\hat{=}$ den meisten Experimenten): Spinorientierungen des Anfangszustandes seien zufällig verteilt, und im Endzustand wird die Spinorientierung der einzelnen Teilchen nicht gemessen.

$\rightarrow$ <u>Mittelwert</u> über alle Spinkonfigurationen im Anfangszustand
<u>Summe</u> $\qquad$ " $\qquad$ Endzustand

$$\rightarrow |\mathcal{M}|^2 \rightarrow \langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{4} \sum_{s_1=\pm1} \sum_{s_2=\pm1} \sum_{s_3=\pm1} \sum_{s_4=\pm1} |\mathcal{M}|^2$$

In unserem Bsp ist

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(q_A-p_1)^4} \sum_{\mu,\nu} \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A,s_3) \underbrace{\left[\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\nu u(\vec{q}_A,s_3)\right]^*}\, \bar{u}(\vec{p}_2,s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B,s_4)\left[\bar{u}(\vec{p}_2,s_2)\gamma_\nu u(\vec{q}_B,s_4)\right]^*$$

$=$ ein Skalar (keine Matrix; oder: 1x1-Matrix)

$$= \left[\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\nu u(\vec{q}_A,s_3)\right]^\dagger = \left[u^\dagger(\vec{p}_1,s_1)\gamma^0\gamma^\nu u(\vec{q}_A,s_3)\right]^\dagger$$

$$= u^\dagger(\vec{q}_A,s_3)\underbrace{\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{0\dagger}}\, u(\vec{p}_1,s_1) = \bar{u}(\vec{q}_A,s_3)\gamma^\nu u(\vec{p}_1,s_1)$$

$$= \gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=\mathbb{1}}\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu \quad \text{(s. Übung, Aufgabe 106)}$$

also mit Mittelwert und Summe:

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4(q_A-p_1)^4} \sum_{s_i=\pm1} \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A,s_3)\, \bar{u}(\vec{q}_A,s_3)\gamma^\nu u(\vec{p}_1,s_1)\, *$$
$$* \, \bar{u}(\vec{p}_2,s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B,s_4)\, \bar{u}(\vec{q}_B,s_4)\gamma_\nu u(\vec{p}_2,s_2)$$

Spinsumme? Vollständigkeitsrelation (s. S. 21)! $\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s) = \not{p} + m\mathbb{1}$

außerdem gilt (für irgendeine 4x4-Matrix M)

$$\sum_s \bar{u}(\vec{p},s) M u(\vec{p},s) = \sum_s \bar{u}_\alpha(\vec{p},s) M_{\alpha\beta}\, u_\beta(\vec{p},s) = \sum_s M_{\alpha\beta}\, u_\beta(\vec{p},s)\bar{u}_\alpha(\vec{p},s)$$
$$= \sum_s \mathrm{Sp}\left(M u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)\right) = \mathrm{Sp}\left(M(\not{p}+m)\right)$$

also ist insgesamt

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4(q_A-p_1)^4}\, \mathrm{Sp}\left[\gamma^\mu(\not{q}_A+m_e)\gamma^\nu(\not{p}_1+m_e)\right]\, \mathrm{Sp}\left[\gamma_\mu(\not{q}_B+m_\mu)\gamma_\nu(\not{p}_2+m_\mu)\right]$$

<u>Bem:</u>
- faktorisiert in e^-- und μ^--Anteil
- keine Spinoren mehr!
- brauchen jetzt Spuren über γ-Matrizen

Spuren über γ-Matrizen:

es gilt (s. Übungen, Aufgabe 25)

$$Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4 g^{\mu\nu}$$

$$Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = 0$$

$$Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4\left(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}\right)$$

((und, natürlich, $Sp(A+B) = Sp(A) + Sp(B)$; $Sp(cA) = c\, Sp(A)$;
$Sp(AB) = Sp(BA)$; für Matrizen A, B und Zahl c))

so daß für unser Bsp gilt

$$Sp\left[\gamma^\mu (\not{q}_A + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_1 + m_e)\right] = (q_A)_\alpha (p_1)_\beta\, Sp\left[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta\right] + \ldots \underbrace{Sp[(\gamma)^3]}_{0} + m_e^2\, Sp[\gamma^\mu \gamma^\nu]$$

$$= 4 (q_A)_\alpha (p_1)_\beta \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}\right) + 4 m_e^2 g^{\mu\nu}$$

$$= 4\left(q_A^\mu p_1^\nu + q_A^\nu p_1^\mu + g^{\mu\nu}(m_e^2 - q_A \cdot p_1)\right)$$

also insgesamt

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{4e^4}{(q_A - p_1)^4} \Big\{ \left[q_A \cdot q_B\; p_1 \cdot p_2 + q_A \cdot p_2\; q_B \cdot p_1 + q_A \cdot p_1 (m_\mu^2 - q_B \cdot p_2) \right] \cdot 2$$

$$+ (m_e^2 - q_A \cdot p_1)\Big(q_B \cdot p_2 \cdot 2 + \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{= g^\mu{}_\mu = Sp\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 4} (m_\mu^2 - q_B \cdot p_2)\Big) \Big\}$$

$$= \frac{8e^4}{(q_A - p_1)^4} \left\{ q_A \cdot q_B\; p_1 \cdot p_2 + q_A \cdot p_2\; q_B \cdot p_1 - m_\mu^2\, q_A \cdot p_1 - m_e^2\, q_B \cdot p_2 + 2 m_e^2 m_\mu^2 \right\}$$

Bem:
- haben L-invariantes Resultat für $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ gefunden
- können dieses jetzt z.B. auf S. 32 einsetzen

  $\rightarrow \dfrac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega} = \ldots$

  (oder in den L-invarianten Ausdruck von Aufgabe 22!)
- für $m_\mu \gg m_e$ ((vgl. $m_\mu \approx 106$ MeV, $m_e \approx 0.511$ MeV))
  folgt dann der Wirkungsquerschnitt für "Mott-Streuung"
  und daraus für $v_e \ll 1$ die "Rutherford-Formel"