$\Rightarrow \frac{dN_{aus}}{dt}$ = totale Ereignisrate

$$= \frac{1}{V\, 2E_{\vec q_A}\, 2E_{\vec q_B}} \underbrace{\int \frac{d^3\vec p_1}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p_1}} \int \frac{d^3\vec p_2}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q_A-q_B)}_{=:\int d\Phi_2} |\mathcal{M}|^2$$

$= L_{ein} \cdot \sigma$ (laut Def., s. S. 28)

gehe ins Ruhesystem von B (s. S. 29 oben)

$= \frac{|\vec v_A|}{V} \cdot \sigma$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1}{F} \int d\Phi_2\, |\mathcal{M}|^2} \quad \text{Goldene Regel}$$

mit $\int d\Phi_n := \left(\prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3\vec p_i}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j - q_A - q_B \right)$

und Flussfaktor $F = 4|\vec v_A|\, E_{\vec q_A}\, m_B$ (im B-Ruhesyst.)

sieht hier nicht sehr L-inv. aus!

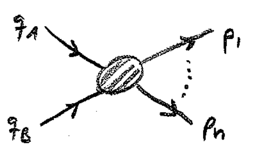
$\int d\Phi_n$ ist L-inv (s. S. 27), $|\mathcal{M}|^2$ auch

⇝ F in L-inv. Form schreiben:

$= 4 \frac{|\vec q_A|}{E_{\vec q_A}} E_{\vec q_A} m_B = 4\sqrt{\vec q_A^{\,2} m_B^2} = 4\sqrt{(E_{\vec q_A}^2 - m_A^2)\, m_B^2}$

$= 4\sqrt{(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$ (denn $q_B = (m_B, 0)$, $q_A = (E_{\vec q_A}, \vec q_A)$)

Insgesamt haben wir also die Goldene Regel in allg. Form



: $\sigma_{2\to n} = \frac{1}{F} \int d\Phi_n\, |\mathcal{M}|^2$

Amplitude

Phasenraumint., s.o.

$F = 4\sqrt{(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$

Der Flussfaktor F kann auf verschiedene Art und Weise geschrieben werden:

z.B. mit Hilfe der kinematischen Invariante $s := (q_A + q_B)^2$

$$F = 2\sqrt{(2 q_A \cdot q_B)^2 - 4 m_A^2 m_B^2} = 2\sqrt{(s - q_A^2 - q_B^2)^2 - 4 m_A^2 m_B^2}$$

$$= 2\sqrt{(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4 m_A^2 m_B^2}$$

((<u>Bem.</u>: s wird häufig verwendet, denn es ist

die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem $= E_A + E_B = \sqrt{s}$;

denn: CMS $\quad \vec{q}_A \longrightarrow \longleftarrow \vec{q}_B = -\vec{q}_A \quad \Rightarrow \quad q_A = (E_{\vec{q}_A}, \vec{q}_A)$

"center of mass system" $\qquad\qquad q_B = (E_{\vec{q}_B}, -\vec{q}_A)$

also $q_A + q_B = (E_A + E_B, \vec{0})$ mit $E_A = \sqrt{\vec{q}_A^{\,2} + m_A^2}$, $E_B = \sqrt{\vec{q}_A^{\,2} + m_B^2}$

und $(q_A + q_B)^2 = (E_A + E_B)^2 = s$ ■))

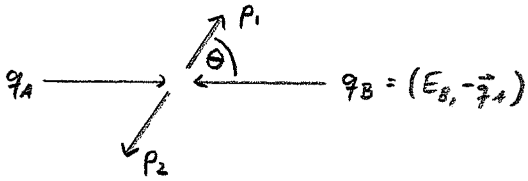
<u>oder z.B.</u> im Schwerpunktsystem (CMS)

$$
\begin{aligned}
(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2 &= (E_A E_B + \vec{q}_A^{\,2})^2 - m_A^2 m_B^2 \\
&= E_A^2 E_B^2 + 2 E_A E_B \vec{q}_A^{\,2} + (\vec{q}_A^{\,2})^2 - m_A^2 m_B^2 \\
&= \vec{q}_A^{\,2} \left(2\vec{q}_A^{\,2} + m_A^2 + m_B^2 + 2 E_A E_B\right) = \vec{q}_A^{\,2} (E_A + E_B)^2
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow F = 4(E_A + E_B)|\vec{q}_A|$

<u>Bsp</u>: Phasenraumintegration für Zweikörper-Streuung

$A + B \to 1 + 2$ im CMS:



$$
\begin{aligned}
d\sigma_{2\to 2} &= \frac{1}{F}\, d\Phi_2\, |\mathcal{M}|^2 \\
\text{s.o.} \rightarrow &= \frac{1}{4(E_A+E_B)|\vec{q}_A|} \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \overbrace{\delta(E_1+E_2-E_A-E_B)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}^{=\delta^{(4)}(\Sigma p - \Sigma q) \text{ im CMS}} |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}
$$

nutze $\delta^{(3)}$ für $\vec{p}_2$-Integration. Nachlässigkeit in Bezeichnung: wieder $d\sigma$

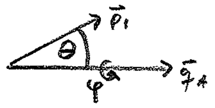
$$
= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{q}_A|(E_A+E_B)}\, d^3\vec{p}_1\, \frac{\delta\left(\sqrt{m_1^2+\vec{p}_1^{\,2}} + \sqrt{m_2^2+\vec{p}_1^{\,2}} - E_A - E_B\right)}{\sqrt{m_1^2+\vec{p}_1^{\,2}}\sqrt{m_2^2+\vec{p}_1^{\,2}}}
$$

wovon kann $|\mathcal{M}|^2$ abhängen?

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, \vec{q}_B, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, -\vec{q}_A, \vec{p}_1, -\vec{p}_1) = |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, \vec{p}_1) \\
&= |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A^{\,2}, \vec{p}_1^{\,2}, \vec{q}_A \cdot \vec{p}_1) = |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)
\end{aligned}
$$

da $|\mathcal{M}|^2$ ein Skalar sein muss

Schreibe $\vec{p}_1$-Integration in Kugelkoordinaten um $\vec{q}_A$



$$d^3\vec{p}_1 = \rho^2 d\rho \, d\Omega \quad , \quad \rho \equiv |\vec{p}_1|$$
$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

substituiere $\rho \to E := \sqrt{m_1^2+\rho^2} + \sqrt{m_2^2+\rho^2}$ in Radialintegration

$$\Rightarrow dE = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{m_1^2+\rho^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{m_2^2+\rho^2}} \right) 2\rho d\rho = E \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{m_1^2+\rho^2}\sqrt{m_2^2+\rho^2}}$$

und $\rho(E) = \frac{1}{2E} \sqrt{E^4 - 2E^2(m_1^2+m_2^2) + (m_1^2-m_2^2)^2}$

((denn: $E^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\rho^2 + 2\sqrt{1}\sqrt{2}$

$$(E^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2\rho^2)^2 = 4(m_1^2+\rho^2)(m_2^2+\rho^2)$$

$$E^4 + m_1^4 + m_2^4 + \cancel{4\rho^4} - 2E^2 m_1^2 - 2E^2 m_2^2 - 4E^2\rho^2 + 2m_1^2 m_2^2 + \cancel{4m_1^2\rho^2} + \cancel{4m_2^2\rho^2}$$
$$= 4m_1^2 m_2^2 + \cancel{4m_1^2\rho^2} + \cancel{4m_2^2\rho^2} + \cancel{4\rho^4}$$

diese Glg nach ρ^2 auflösen ■))

können auch noch $E_A + E_B = \sqrt{s}$ im CMS verwenden

$$\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{|\vec{q}_A|\sqrt{s}} \int_{m_1+m_2}^{\infty} \frac{dE}{E} \rho(E) \, |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, \rho(E), \cos\theta) \cdot \delta(E - \sqrt{s})$$

Deltafkt schlägt nur für $\sqrt{s} > m_1 + m_2$ zu!

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{|\vec{q}_A|\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \rho(\sqrt{s}) \, |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, \rho(\sqrt{s}), \cos\theta) \cdot \Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$$

aber $\rho = |\vec{p}_1|$, s.o., so daß $\rho(\sqrt{s})$ das durch E-p-Erhaltung fixierte $|\vec{p}_1|$ ist

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{q}_A|} \frac{|\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)}{(E_A + E_B)^2}$$

Bem.:
- konnten für $2 \to 2$ Streuung also Phasenraumintegration ohne explizite Kenntnis von $|\mathcal{M}|^2$ ausführen!
- im Allgemeinen geht das nicht bei $2 \to n > 2$
- haben im CMS gearbeitet, und $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ durch Variablen in diesem System ausgedrückt.
- manchmal bequemer: Lorentz-invariante Variablen
  L-inv: m_A, m_B, m_1, m_2; Mandelstam-Variablen $\left\{ \begin{array}{l} s := (q_A + q_B)^2 \\ t := (q_A - p_1)^2 \\ u := (q_A - p_2)^2 \end{array} \right.$
  ↳ s. Übung, Aufgabe 21