damit wird das nicht-triviale Matrixelement
(in erster Ordnung Stö.)

$$S_{fi} \overset{!}{=} -i \langle \pi^+(\vec{p}_1)\pi^-(\vec{p}_2) | \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x \; \mathcal{M} \hat{\phi}^+ \hat{\phi} \hat{\rho} \; | \rho(\vec{q}) \rangle$$

$$= -i \int dt' \int d^3x \; \mathcal{M} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_1}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_2}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_q}} e^{i(p_1+p_2-q)x}$$

$$= -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q) \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_1}\sqrt{(2\pi)^3 2E_2}\sqrt{(2\pi)^3 2E_q}} \longleftarrow \text{Amplitude}$$

$$=: -i (2\pi)^4 \underbrace{\delta^{(4)}(p_1+p_2-q)}_{\text{E-p-Erhaltung; kommt automatisch heraus.}} T_{fi} \longleftarrow \text{Transfermatrixelement}$$

zur Berechnung der Zerfallsrate des ρ müssen wir über die Impulse aller auslaufenden Teilchen integrieren; $\left(\left(\Gamma \sim \frac{\text{Wahrsch.}}{\text{Zeit}} \sim \frac{|S|^2}{T}, \text{ s. S. 25} \right)\right)$

$$\Gamma = \frac{1}{T} \int d^3p_1 \int d^3p_2 \; |S_{fi}|^2$$

$$= \frac{1}{T} \int d^3p_1 \int d^3p_2 \; (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q) \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)}_{= V\cdot T, \text{ vgl. S. 18}} |T_{fi}|^2$$

das ρ im Anfangszustand ist ebene Welle, also überall im Raum.

Normierung $\langle \rho(\vec{q}) | \rho(\vec{q}) \rangle = \delta^{(3)}(\vec{0}) = \frac{V}{(2\pi)^3}$

$$\left(\left(\text{denn: } \langle \rho(\vec{p}) | \rho(\vec{q}) \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}}^{+\dagger} \hat{a}_{\vec{q}}^{+} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}}^{+} | 0 \rangle \right.\right.$$

$$\left.\left. = \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^{+}] + \cancel{\hat{a}_{\vec{q}}^{+} \hat{a}_{\vec{p}}} | 0 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) \langle 0|0 \rangle \right)\right)$$

also teilen wir für ein Teilchen mit Norm $\langle \rho | \rho \rangle \equiv 1$ durch $V/(2\pi)^3$:

$$\boxed{\Gamma_{\rho\to\pi^+\pi^-} = \frac{1}{2E_{\vec{q}}} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q) \; |\mathcal{M}|^2}$$

"Fermi's Goldene Regel"

$$\Gamma_{\rho\to 1\ldots n} = \frac{1}{2E_{\vec{q}}} \, c \, \underbrace{\int d\Phi_n}_{} \, |\mathcal{M}|^2$$

$$\int d\Phi_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - q \right)$$

$$= \text{"n-Teilchen Phasenraumintegration"}$$

statistischer Faktor, z.B. $c = \frac{1}{N!}$ für N identische T.

zur endgültigen Berechnung der Zerfallsrate muss jetzt "nur noch" die Phasenraumintegration ausgeführt werden.

z.B. für $A \to 1+2$ im A-Ruhesystem ← s. Übung, Aufgabe 17

nützlich: Phasenraumintegration Lorentz-invar. schreiben (($p=(p^0;\vec{p})$))

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\,\delta(p^2-m^2)\,\Theta(p^0) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp_0\, \delta(p_0^2-E_{\vec{p}}^2) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_{\vec{p}}}$$

((via $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ für einfache Nullstellen x_i von f))

3.2 Streuprozesse

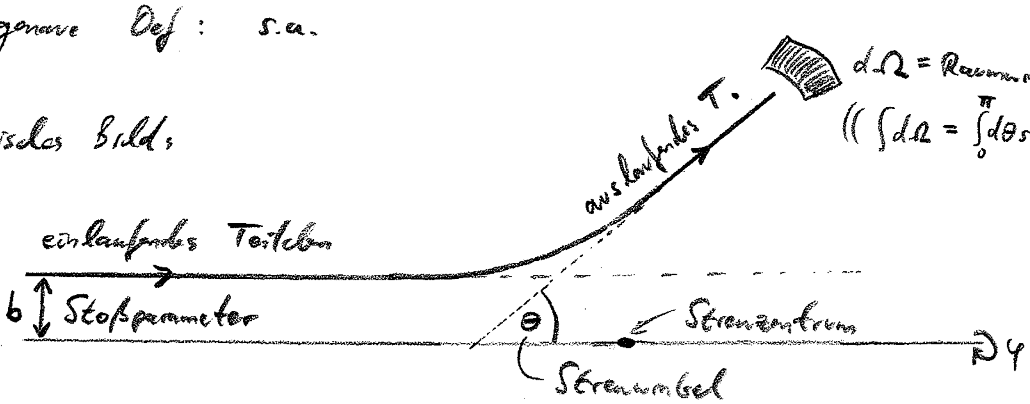
wichtige Vokabeln:

- elastische Streuung / inelastische Streuung
  $1+2 \to 1+2$ — $1+2 \to 1+2+3+\dots$ oder $1+2 \to 3+4$ etc
- exklusiver Prozeß / inklusiver Prozeß
  alle Streuprodukte werden untersucht — nur ein Teil der Streuprodukte werden identifiziert: z.B. $1+2 \to 3+$"Rest"
- Wirkungsquerschnitt σ
  klassisch: Größe des Ziels, aus der Sicht des einlaufenden T.
  QM: ähnlich; hängt von v ($\hat{=} E$) der T. ab.
  E-Abhängigkeit kann groß sein; bei "Resonanzenergie" wirkt Ziel groß!

genaue Def: s.u.

klassisches Bild:

$d\Omega$ = Raumwinkel = $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$
(($\int d\Omega = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$))



- barn ("Scheune")
  oft benutzte Einheit von σ. $1\ \text{barn} = 10^{-28}\,\text{m}^2 = (10\,\text{fm})^2$
  $\hat{\approx}$ geometrischer Querschnitt schwerer Atome (z.B. Uran)

def <u>differentieller Streuquerschnitt</u> $\frac{d\sigma}{d\Omega} := \frac{1}{L_{ein}} \frac{d^2 N_{aus}}{d\Omega\, dt}$

Luminosität $= \frac{d^2 N_{ein}}{dA\, dt}$

= Anzahl der einlaufenden T. pro Zeit- und Flächeneinheit

Anzahl der in Richtung $\Omega = (\theta, \varphi)$ beobachteten auslaufenden T. pro Zeiteinheit pro Raumwinkel

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right] = \frac{1}{\frac{1}{m^2 s}} \frac{1}{s} = m^2 = [\text{Fläche}]$$

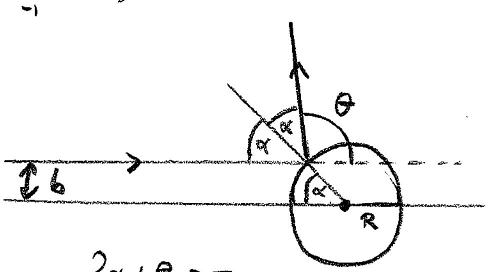
$\Rightarrow$ Ereignisrate = Wirkungsquerschnitt $\cdot$ Luminosität

def <u>totaler Wirkungsquerschnitt</u>

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\varphi)$$

$$\left(\text{oft: } u := \cos\theta, \quad \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = \int_{-1}^{1} du \right)$$

Bsp: Streuung an harter Kugel



Frage: $\sigma = ?$

hier $b \sim \sigma$: $b = R\sin(\alpha)$, $2\alpha + \theta = \pi$

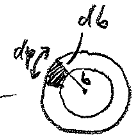
$= R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Luminosität $L_{ein} = \frac{N_{ein}}{V} \cdot v$ — Geschw. d. ein- (und aus-) laufenden T.

zwischen $\theta, \theta + d\theta$ beobachtet man Teilchen aus $b, b+db$

mit $db = -\frac{R}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$

also
$$\frac{d^2 N_{aus}}{d\Omega\, dt} = \frac{1}{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi} \frac{N_{ein}}{V} \cdot v \, |b\, db\, d\varphi|$$



Flächenel. um b

$$= L_{ein} \frac{R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{R}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta\, d\varphi}{\sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi}$$

$$= L_{ein} \frac{R^2}{4} \qquad (\text{da } \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha))$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

und $\underline{\underline{\sigma = \int d\Omega \frac{R^2}{4} = \pi R^2}}$ ist klassischer Querschnitt der Kugel!

- <u>Luminosität</u> in Teilchenstößen

$A + B \rightarrow$ "irgendetwas".

$m_B \neq 0$ $\rightarrow$ gehe ins Ruhesystem von Teilchen B $A \bullet \xrightarrow{\vec{v}_A} \bullet B$

Normierung $\langle A|A\rangle = 1 = \langle B|B\rangle$

($\hat{=}$ nur ein T. A und ein T. B im ganzen Volumen V)

Luminosität der einlaufenden ebenen A-Welle ist dann

$$L_{ein} = \frac{1}{V}|\vec{v}_A|$$

Geschwindigkeit

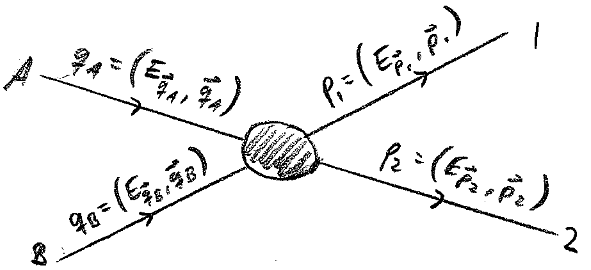
durchschnittliche Teilchendichte

Goldene Regel für Streuprozesse

"Rezept" wie bei Zerfallsrate: Amplituden ($\mathcal{M}$) ← dynamische Information; bzw. → Feynmanregeln, s.u.

Phasenraum ← kinematische Information; $m, E, \vec{p}$

z.B.



$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V} \quad \text{mit} \quad g\hat{V} = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{M}\, \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2$$

berechnen wieder (vgl. S. 25, 26) Streumatrixelement in 1. Ordn. Stö

einl. T. $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{q}}}} e^{-iqx}$, ausl. T. $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} e^{+ipx}$

$$S_{fi} = -i \langle \phi_1(\vec{p}_1)\phi_2(\vec{p}_2) | \int dt' d^3\vec{x}\, \mathcal{M}\, \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 | \phi_A(\vec{q}_A)\phi_B(\vec{q}_B)\rangle$$

$$= -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_A - q_B) \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}\sqrt{\quad}_{p_2}\sqrt{\quad}_{q_A}\sqrt{\quad}_{q_B}}$$

und, wie oben: Rate $= \frac{|S_{fi}|^2}{T}$; dabei $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) \rightarrow V \cdot T$

integriere über alle $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ für totalen Wirkungsquerschnitt

2 ebene Wellen im Anfangszustand

$\rightarrow$ teile für 2 Teilchen durch $\left[\frac{V}{(2\pi)^3}\right]^2$