Dirac-Glg

suche Lsn der Dirac-Glg $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$, $\psi(x) = \psi(t,\vec{x}) = ? \in \mathbb{C}$

wieder als ebene Wellen $\psi(x) \sim u(\vec{p})\, e^{-ipx}$

← analog Pol.-Vektor $\vec{\varepsilon}(\vec{p})$ in Max-Lsn

d.h. $i\partial_\mu \to p_\mu$

$$\Rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\vec{p}) = 0$$

bzw. $\boxed{(\not{p} - m)\, u(\vec{p}) = 0}$ mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu$

bzw. (mit Standard-Darst. der γ^μ, s. S. 13)

$$\begin{pmatrix} (p^0-m)\mathbb{1} & -p^k\sigma^k \\ p^k\sigma^k & (-p^0-m)\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (p^0-m)\,u_1 - p^k\sigma^k u_2 &= 0 \\ p^k\sigma^k u_1 - (p^0+m)\,u_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{p^0-m}\, p^k\sigma^k u_2 = \frac{1}{(p^0)^2-m^2}\, \underbrace{p^k\sigma^k p^j\sigma^j}\, u_1$$

$$= p^k p^j \tfrac{1}{2}\{\sigma^k,\sigma^j\} = p^k p^j \tfrac{1}{2}\, 2\delta^{kj}\, \mathbb{1}_{2\times 2} = \vec{p}^{\,2}\, \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{(p^0)^2 - m^2} \quad \Leftrightarrow \quad p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2} = \pm E_{\vec{p}}$$

es gilt (wie bei KG) wieder 2 Arten von Lsn: "pos/neg. Energie"

Lsg "pos. Energie": $u(\vec{p})\, e^{-ipx}$, erfüllt $(\not{p}-m)\,u(\vec{p}) = 0$

$\Rightarrow$ setze $u(\vec{p}) = (\not{p}+m)\cdot c_1 \cdot u_0$ ← Spinor; unabhängig von $\vec{p}$

← Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$ (s.u.: aus Norm)

((denn dann $(\not{p}-m)(\not{p}+m)\, c\, u_0 = (p^2-m^2)\, c\, u_0 = 0$))

zwei unabh. (Spin-) Zustände; wähle $u_0 = \begin{pmatrix} \xi_\pm \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

also insgesamt $u(\vec{p},s) = c_1\,(\not{p}+m)\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}$, $s = \pm$

Lsg "neg. Energie": $v(\vec{p})\, e^{+ipx}$ mit $p^0 = +E_{\vec{p}}$, erfüllt $(\not{p}+m)\,v(\vec{p}) = 0$

$\Rightarrow$ setze $v(\vec{p}) = (\not{p}-m)\cdot c_2 \cdot v_0$

wähle $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_\pm \end{pmatrix}$

so daß $v(\vec{p},s) = c_2\,(\not{p}-m)\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}$

die Lsn u, v sind orthogonal gewählt: $u^\dagger v = 0 = v^\dagger u$

Im Ruhesystem ($\vec{p} = \vec{0}$; $p^0 = m$) ergibt sich damit

$$u(\vec{0},s) = c_1 \begin{pmatrix} 2m\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} = 2mc_1 \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\vec{0},s) = c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix} = -2mc_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}$$

def. <u>hermitesch konjugierter</u> Spinor $u^+ := (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$ falls $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$

def. <u>Dirac-adjungierter</u> Spinor $\bar{u} := u^+ \gamma^0$

Normierung der Lsn? → Wahl der Konstanten c_1, c_2

fordere $\bar{u}(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = 2m\,\delta_{ss'}$

$\bar{v}(\vec{p},s)v(\vec{p},s') = -2m\,\delta_{ss'}$

($\bar{u}v = 0 = \bar{v}u$ automatisch durch Wahl der u_0, v_0)

$$\Rightarrow \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}+m}}$$

$$\Rightarrow \quad u^+(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = 2E_{\vec{p}}\,\delta_{ss'} = v^+(\vec{p},s)v(\vec{p},s')$$

Beweis s. Übung Aufgabe 14

---

oft (s.z.B. später: Auswertung von "Feynman-Diagrammen") brauchen wir die Summe über alle Spinzustände: <u>Vollständigkeitsrelation</u>

$$\sum_{s=\pm} u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},s) = \underbrace{\sum_s}\, c_1^2 (\not{p}+m)_{\alpha\beta} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (\xi_s^T\ 0)_\delta} \underbrace{(p_\mu\gamma^{\mu +}+m)_{\delta\sigma}\gamma^0_{\sigma\varsigma}}_{=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0}$$

, s. Übung 10a

$$\sum_s \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (\xi_s^T\ 0)_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (1000)_\delta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (0100)_\delta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\beta\delta}$$

letzter Term:

$$(p_\mu\gamma^{\mu +}+m)\gamma^0 = (p_\mu\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0+m)\gamma^0 = \gamma^0(\not{p}\gamma_0^2+m) = \gamma^0(\not{p}+m)$$

$$= \frac{1}{p^0+m} \begin{pmatrix} p^0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p^0+m \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\beta\delta} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}_{\delta\sigma} \begin{pmatrix} p^0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p^0+m \end{pmatrix}_{\sigma\varsigma}$$

$$= \frac{1}{p^0+m} \begin{pmatrix} (p^0+m)^2 & -(p^0+m)\vec{p}\vec{\sigma} \\ (p^0+m)\vec{p}\vec{\sigma} & -\vec{p}^2 \end{pmatrix}_{\alpha\varsigma}$$

$$\left(-\vec{p}^2 = m^2 - p_0^2 = (m-p^0)(m+p^0)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} p^0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p^0+m \end{pmatrix}_{\alpha\varsigma}$$

$$= (\not{p}+m)_{\alpha\varsigma}$$

$$\sum_{s=\pm} v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\varsigma(\vec{p},s) = \ldots = (\not{p}-m)_{\alpha\varsigma} \qquad \text{genauso}$$

Zweite Quantisierung

die Lsn der Dirac-Glg werden durch Teilchen- und Antiteilchenzustände interpretiert. [→ s. QFT-Vorlesung]

Hier: die wichtigsten Resultate der QFT-Behandlung als "Zitat"

Felder $\psi(x)$ → Feldoperatoren

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}\, u(\vec{p},s)\, e^{-ipx} + \hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}}\, v(\vec{p},s)\, e^{+ipx} \right)$$

$$\hat{\bar{\psi}} = \qquad \hat{a}^{+} \quad \bar{u} \quad e^{+ipx} \qquad \hat{b} \quad \bar{v} \quad e^{-ipx}$$

Vertauschungsrelationen sind Antikommutatoren

$$\left\{ \hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+(s')}_{\vec{p}'} \right\} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta_{ss'} = \left\{ \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{b}^{+(s')}_{\vec{p}'} \right\} \quad ; \quad \text{Rest} = 0$$

⇒ Dirac-Felder gehorchen der Fermi-Dirac-Statistik

z.B. 1-Elektron-Zustand $|e^-\rangle \sim \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}|0\rangle$

2- " $|2e^-\rangle \sim \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\,\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ Pauli-Prinzip

Ges.-Energie → Hamilton-Operator (wie bei KG-Glg, s.S. 18)

$$\hat{H} = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}} - \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}\hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}} \right)$$

$$= \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}} + \hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} - \delta^{(3)}(\vec{0}) \right)$$

erhaltene Gesamtladung

$$\hat{Q} = \int d^3\vec{x}\; \hat{\bar{\psi}}\gamma_0\hat{\psi} = \int d^3\vec{p} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}} - \hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}}\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} \right)$$

völlig analog zur Lsg der KG-Glg (s.S. 18) interpretiert man die Operatoren $\hat{a}, \hat{b}$ wieder als ein/aus-laufende Teilchen/Antiteilchen:

	Teilchen	Antiteilchen
einlaufendes	$\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}$	$\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}$
auslaufendes	$\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}$	$\hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}}$