Zweite Quantisierung

Abkehr von der Willkür verschiedener Interpretationen

Feld $\phi(x) \to$ Operator $\hat\phi(x)$ ($\hat{=}$ Quanten Feld Theorie)

QM : $[\hat x, \hat p] = i \longrightarrow$ QFT: $[\hat\phi(t,\vec x), \partial_0 \hat\phi^+(t,\vec y)] = i\delta^{(3)}(\vec x - \vec y)$

diese Vertauschungsrelation wird erfüllt durch

$$\hat\phi(x) = \int \frac{d^3\vec p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}} \left(\hat a_{\vec p}\, e^{-ipx} + \hat b^+_{\vec p}\, e^{ipx} \right)$$

$$\left(\left(\Rightarrow \hat\phi^+ = \qquad \hat a^+ \, e^+ + \hat b \, e^- \right)\right)$$

mit $[\hat a_{\vec p}, \hat a^+_{\vec q}] = \delta^{(3)}(\vec p - \vec q) = [\hat b_{\vec p}, \hat b^+_{\vec q}]$

$0 = [\hat a_{\vec p}, \hat a_{\vec q}] = [\hat b_{\vec p}, \hat b_{\vec q}] = [\hat a_{\vec p}, \hat b_{\vec q}] = \dots$ } vgl. harm. Osz. S.9

((Beweis: s. Übung, Aufgabe 11))

$\to$ QFT-Lsg folgt aus klass. Lsg durch

$a_{\vec p}, a^*_{\vec p}, b_{\vec p}, b^*_{\vec p} \longrightarrow \hat a_{\vec p}, \hat a^+_{\vec p}, \hat b_{\vec p}, \hat b^+_{\vec p}$ (Vernichter + Erzeuger)

Interpretation:

$\hat Q := i\int d^3\vec x \left(\hat\phi^+ \partial_0 \hat\phi - \hat\phi \partial_0 \hat\phi^+ \right)$ ist erhalten

((vgl. S.16; Übung, Aufgabe 12))

$= \dots$ [ϕ einsetzen, $\int d^3\vec x\, e^{i\vec p\vec x} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec p)$, $[a,b]=0$ brauchen]

$$= \int d^3\vec p \left(\frac{1}{2}\left(\hat a^+_{\vec p} \hat a_{\vec p} + \underbrace{\hat a_{\vec p} \hat a^+_{\vec p}}_{=\cancel{[a,a^+]} + a^+a} \right) - \frac{1}{2}\left(\hat b^+_{\vec p} \hat b_{\vec p} + \underbrace{\hat b_{\vec p} \hat b^+_{\vec p}}_{=\cancel{[b,b^+]} + b^+b} \right) \right)$$

$= \int d^3\vec p \left(\hat a^+_{\vec p} \hat a_{\vec p} - \hat b^+_{\vec p} \hat b_{\vec p} \right)$ ist Differenz von Besetzungszahl-Op's !

$\sim$ Anzahl (π^+) − Anzahl (π^-)

$\sim$ Ladung (und nicht Wahrscheinlichkeit → darf neg. sein!)

sowie

$$\hat H = \int d^3\vec x \left((\partial_0 \hat\phi)\partial_0\hat\phi^+ + (\vec\nabla\hat\phi^+)\cdot\vec\nabla\hat\phi + m^2\hat\phi^+\hat\phi \right)$$

$= \ldots$ [ϕ einsetzen, $\int d^3\vec x\, e^{i\vec p\vec x} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec p)$, $[a,b]=0$ benutzen]

$$= \int d^3\vec p\; E_{\vec p}\left(\tfrac12\left(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} + \hat a_{\vec p}\hat a^+_{\vec p}\right) + \tfrac12\left(\hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} + \hat b_{\vec p}\hat b^+_{\vec p}\right)\right)$$

$$= \int d^3\vec p\; E_{\vec p}\left(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} + \hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} + \delta^{(3)}(\vec 0)\right)$$

ist Summe von Bes.-zahl-Op's !

$=$ positiv !

"Vakuumenergie" unphysikalisch !

falls Volumen des Systems endlich

$\left((2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec 0) = \int d^3x\, e^{i0\cdot x} = \int d^3x \to \int_{(V)} d^3x = V \right)$

$\sim$ Gesamtenergie

haben also keine neg. Energien mehr.

$\hat a_{\vec p}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec p$;
dieses muss also im Anfangszustand vorhanden sein.

$\hat a^+_{\vec p}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\vec p$;
dieses muss also im Endzustand vorhanden sein.

$\Rightarrow$ $\hat a_{\vec p}$ repräsentiert ein einlaufendes Teilchen
$\hat a^+_{\vec p}$ auslaufendes Teilchen
$\hat b_{\vec p}$ einlaufendes Antiteilchen
$\hat b^+_{\vec p}$ auslaufendes Antiteilchen

	T.	A.
ein	$\hat a_{\vec p}$	$\hat b_{\vec p}$
aus	$\hat a^+_{\vec p}$	$\hat b^+_{\vec p}$

Maxwell-Glg. (s. 5.15)

strukturell: Max $\approx$ KG ; benutze Lsg der KG mit kleinen Änderungen

wegen "Eichfreiheit" dürfen wir von den Lsn

(z.B.) fordern: $\partial_i A^i(t,\vec x) = 0$ "Coulomb-Eichung"

$\Rightarrow (\text{Max})^{\nu=0}$: $\partial_i\partial^i A^0 = j^0$

(Greens zu Δ) $\Rightarrow A^0(t,\vec x) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec x'\, \frac{\rho(t,\vec x')}{|\vec x - \vec x'|}$

$\rightarrow A^0 \sim \rho$ in Coulomb-Eichg. keine Wellen.

$\partial_i A^i = 0$ benutzt

$\Rightarrow (\text{Max})^{\nu=i}: \quad \partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial_0 \partial^i A^0 = j^i$

$\Leftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^i = j^i + \partial_0 \partial^i A^0$; 3 (inhom.) Wellengln!

also können wir für die <u>freien</u> Max. $(\rho = 0, \vec{j} = \vec{0})$

$A^0 = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^i = 0, \quad \partial_i A^i = 0$ (Coulomb-Eichung)

Lösungen als ebene Wellen finden

Wie KG. Hier aber:

- $A^\mu(t,\vec{x})$ reell $\Leftrightarrow \hat{A}^\mu(t,\vec{x})$ hermitesch $\Leftrightarrow \hat{a}_{\vec{p}} = \hat{b}_{\vec{p}}$
- i.A. gibt es <u>vier</u> verschiedene Lsn A^μ, $\mu = 0,1,2,3$

  $\Rightarrow$ <u>Polarisationsvektor</u> $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$

$$\hat{A}^\mu(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_\lambda \varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p}) \left(\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}} e^{-ipx} + \hat{a}^{+(\lambda)}_{\vec{p}} e^{ipx} \right)$$

$\Rightarrow \varepsilon^0_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$ (damit $A^0 = 0$)

$p_i \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$ (damit $\partial_i A^i = \ldots p_i \varepsilon^i \ldots = 0$)

d.h. $\vec{\varepsilon} \perp \vec{p}$: Pol.-vektor $\perp$ Ausbreitungsrichtung

$\Rightarrow \exists$ <u>zwei</u> lin. unabh. Lsn

z.B. $\vec{p} = |\vec{p}|\vec{e}_z \Rightarrow \vec{\varepsilon}_{(1)} = (1,0,0)$

$\vec{\varepsilon}_{(2)} = (0,1,0)$ (oder LK's)

$\Rightarrow$ freies Photon ist <u>transversal</u> polarisiert

für die Summe über alle Polarisationsvektoren gilt die "Vollständigkeitsrelation"

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p})\, \varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^2}$$

(in Coulomb-Eichung)

<u>Bem:</u>
- $A^\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Lsg hat keinen $\hat{b}$-Op. $\Rightarrow \nexists$ Antiphotonen
- $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}} / \hat{a}^{+(\lambda)}_{\vec{p}}$ repräsentiert ein einlaufendes/auslaufendes Teilchen
- Polarisation bestimmt durch $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$, $\lambda = 1,2$