auf beiden Seiten der Glg (*) steht eine Summe von Termen die quadratisch in p-Komponenten sind:

Koeff-Vergleich $p_0p_0,\ p_1p_1, \dots$: $1 \stackrel{!}{=} \gamma^0\gamma^0$, $-1 \stackrel{!}{=} \gamma^1\gamma^1 = \gamma^2\gamma^2 = \gamma^3\gamma^3$

Koeff-Vergleich $p_\mu p_\nu$, $\mu \neq \nu$: $0 \stackrel{!}{=} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$

Lösungsversuch: $\gamma^0 = \pm 1$, $\gamma^k = \pm i$ $(k = 1,2,3)$

$\rightarrow$ erfüllt die ersten vier Rels ✓
aber nicht die letzte ↯

Idee (Dirac!): γ könnten Matrizen sein

Def. Antikommutator $\{A, B\} := AB + BA$

dann ist Glg. (*) $\Leftrightarrow$ $\boxed{2g^{\mu\nu} = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}$

Lösungsversuch: γ könnten 2×2-Matrizen sein

z.B. Pauli-Matrizen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

diese erfüllen $2\delta_{k\ell} = \{\sigma_k, \sigma_\ell\}$

aber die vierte unabh. 2×2-Matrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
erfüllt $\{\mathbb{1}, \sigma_k\} = 2\sigma_k$ ↯

Lösungsversuch: γ könnten 3×3-Matrizen sein

wegen $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ $(\mu \neq \nu)$

ist $\operatorname{Det}(\gamma^\mu)\operatorname{Det}(\gamma^\nu) = (-1)^3 \operatorname{Det}(\gamma^\nu)\operatorname{Det}(\gamma^\mu)$ oder N bei $N\times N$-Matrizen

wir fordern $\operatorname{Det}(\gamma^\mu) \neq 0$ $\Rightarrow$ $N\times N$-Matrizen mit ungeradem N ↯

Lösungsversuch: γ als 4×4-Matrizen

$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$ ✓✓ (Standard-Darstellung)

((alles 2×2 Blöcke: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc))

[$\rightarrow$ γ-Gymnastik: Ü10]

also : $0 = p_\mu p^\mu - m^2 = (\gamma^\rho p_\rho - m)(\gamma^\sigma p_\sigma + m)$

Faktorisierung gelungen ✓

nehme z.B. $0 = \gamma^\mu p_\mu - m$ (($+m$ ist äquivalent, s. später ..))

jetzt wieder $p^0 = E \to i\partial_t$ und $p_i = -p^i \to i\partial_i$ (($\Leftrightarrow p_\mu \to i\partial_\mu$))

so daß $\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0}$ "Dirac - Glg"

Bemerkung: $\underline{4}$ Glen : ψ ≡ Dirac-Spinor = 4-komponentiger Spaltenvektor

und $m := m \cdot \mathbb{1}_{4\times4}$

Relevanz: beschreibt Eigenschaften freier $J = \frac{1}{2}$ Teilchen

($z.B.\ e^-, \mu^-, \dots$)

Spin $\frac{1}{2}$ hat 2 Freiheitsgrade

Dirac-Spinor ψ hat 4 Freiheitsgrade = Teilchen + Antiteilchen (!)

Lösungen: später ..

Maxwell-Glg (Spin 1)

((Einheiten: $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, und natürlich $c = 1$))

(1) $\vec\nabla \cdot \vec E = \rho$ (2) $\vec\nabla \cdot \vec B = 0$

(3) $\vec\nabla \times \vec E = -\dot{\vec B}$ (4) $\vec\nabla \times \vec B = \dot{\vec E} + \vec j$

können wir dies auch Lorentz-kovariant aufschreiben ?

def. Vierer-Strom $j^\mu := (\rho, \vec j)$

Vierer-Potential $A^\mu := (\phi, \vec A)$

$\Rightarrow \vec B = \vec\nabla \times \vec A$, $\vec E = -\vec\nabla\phi - \dot{\vec A}$

erfüllen (2), (3) identisch ✓✓

Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu} \qquad \text{Maxwell-Gln}$$

z.B. $\nu = 0: \quad \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = j^0 = \rho \quad \hat{=} \text{ Max (1) } ✓$

NB: das Viererpotential A^μ ist nicht eindeutig bestimmt:

jedes $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$ (mit beliebigem $\chi(x)$)

ist auch eine Lsg, d.h. gilt dasselbe $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\chi = F^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ "Eichfreiheit"

die freien Maxwell-Gln $\qquad \Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 =$ "d'Alembert-Operator"

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = (\Box \delta^\nu_\mu - \partial^\nu \partial_\mu) A^\mu$$

sind also im Wesentlichen zur KG-Glg äquivalent.

2.2 Lösungen der Grundgleichungen

Klein-Gordon (KG) - Glg (s. S. 12)

$$0 = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi$$

$\phi(x) = \phi(t,\vec{x}) = ?$ kann i.A. reell oder komplex sein

Ansatz (ebene Welle) $\quad \phi(x) = C\cdot e^{-ikx} = C\cdot e^{-ik^\mu x_\mu} = C\cdot e^{-ik_\mu x^\mu}$

einsetzen $\Rightarrow \left((-ik_\mu)(-ik^\mu) + m^2\right) C e^{-ikx} = 0$

$$\Rightarrow k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} =: \pm E_{\vec{k}}$$

allg Lsg ist LK ebener Wellen, mit bel. Koeff. C

$$\phi(x) = \int d^3\vec{k} \left(C_+(\vec{k})\, e^{-iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}} + C_-(\vec{k})\, e^{+iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}} \right)$$

$$= \int d^3\vec{k} \left(C_+(\vec{k})\, e^{-iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}} + C_-(-\vec{k})\, e^{iE_{\vec{k}}t - i\vec{k}\vec{x}} \right)$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{-ipx} + b^*_{\vec{p}}\, e^{ipx} \right)$$

im 2. Schritt: $\vec{k} \to -\vec{k}$ im zweiten Term

im 3. Schritt: $\vec{k} \to \vec{p}$, $E_{\vec{k}} \to E_{\vec{p}} =: p^0$

$$\rightsquigarrow \quad p \cdot p = m^2 \,, \quad p \cdot x = E_{\vec{k}} t - \vec{k}\vec{x}$$

$$C_+(\vec{k}) \to \frac{a_{\vec{p}}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \,, \quad C_-(-\vec{k}) \to \frac{b^*_{\vec{p}}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}$$

wieviele <u>Freiheitsgrade</u> hat diese Lsg?

$a_{\vec{p}}, b^*_{\vec{p}}$ unabhängig voneinander $\Rightarrow \phi \in \mathbb{C} \Rightarrow$ 2 Freiheitsgrade (z.B. $\pi^\pm$)

$a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}$ $\Rightarrow \phi \in \mathbb{R} \Rightarrow$ 1 Freiheitsgrad (z.B. π^0)

Teilcheninterpretation? <u>ein</u> Teilchen (Masse m, Impuls $\vec{q}$)?

- $a_{\vec{p}} \sim \delta(\vec{p}-\vec{q})$, $\quad \phi(x) \sim e^{-iE_{\vec{q}}t + i\vec{q}\vec{x}}$

  $b_{\vec{p}} \sim \delta(\vec{p}-\vec{q})$, $\quad \phi(x) \sim e^{+iE_{\vec{q}}t - i\vec{q}\vec{x}}$

  → KG-Glg enthält <u>immer</u> auch neg. E.-Lsg!

  → Universum instabil?

- bilde $(i\phi^*)(KG) - (i\phi)(KG)^*$

$$\begin{aligned} 0 &= (i\phi^*)(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi - (i\phi)(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi^* \\ &= \partial_t\left[i(\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*)\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[-i(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*)\right] \\ &=: \partial_t \varrho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \qquad ((\text{Conti: } \partial_\mu j^\mu = 0)) \end{aligned}$$

$\vec{j}$: W.-Stromdichte

ϱ: Wahrscheinlichkeitsdichte

$\varrho \sim \pm 2E_{\vec{q}}$! negative Wahrsch.? ↯ $\quad \underline{E<0, \varrho<0}$

historisch: Verwirrung; Problem: <u>Teilcheninterpretation</u>.

→ Feynman-Stückelberg-Interpretation [s. z.B. Halzen/Martin §3.5]

Grundidee $e^{+iEt} = e^{-iE(-t)}$

Teilchen mit $E>0$, propagiert rückwärts in Zeit

≙ Antiteilchen, das vorwärts propagiert

$\xrightarrow{}_t$: Teilchen ≙ $\longrightarrow$

Antiteilchen ≙ $\longleftarrow$