1.5 Reminder: QM

Klassische Mechanik: $E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ hier 1D, der Einfachheit halber

Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

Zustandsvektor

Schrödinger-Glg $i\partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ diktiert Zeitentwicklung

Vertauschungsrelation $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ Kronecker-Delta (($=1$ für $i=j$, 0 sonst))

Energie-Eigenzustände $\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$

$$\Rightarrow |n(t)\rangle = e^{-iE_n t} |n(0)\rangle$$

Übergang zur Ortsdarst. $\psi(x,t) = \langle x | \psi(t)\rangle$ (Projektion auf Ortseigenvektor)

$$\hat{x}_i \to x_i \quad \text{und} \quad \hat{p}_i \to -i\partial_i$$

$\to$ Schrödinger Glg: $i\partial_t \psi(x,t) = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(x)\right)\psi(x,t)$

Konkretes Beispiel: harmonischer Oszillator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

algebraische Lsg: $\hat{H}$ als Absolutquadrat eines Operators darstellen

$\to$ Leiteroperatoren $\hat{a}$ (Vernichtungs-Op.) $:= \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}$

$\hat{a}^+$ (Erzeugungs-Op.) $:= \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}}$

$$\Rightarrow [a, a^+] = 1$$

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(a^+a + aa^+) = \omega\left(\frac{1}{2} + \underbrace{a^+a}_{\equiv \hat{N}}\right)$$

Besetzungszahl-Op.

mit Eigenzuständen $|n\rangle$ von $\hat{N}$

$$\Rightarrow \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

oft kann man ein System aber nicht vollständig lösen!

$\rightarrow$ wichtiges Werkzeug für Näherungs-Lösungen: Störungstheorie

z.B. $\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ wobei $g \ll 1$

Energie-Eigenwerte ? Reihe!

$$E_n = E_n^{(0)} + g E_n^{(1)} + g^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$|n\rangle = |n\rangle^{(0)} + g |n\rangle^{(1)} + \dots$$

$$\rightarrow \hat{H}_0 |n\rangle^{(0)} = E_n^{(0)} |n\rangle^{(0)}$$

$$E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n | \hat{V} | n\rangle^{(0)}$$

$$\vdots$$

es werden oft verschiedene Darstellungen der Zeitabhängigkeit benutzt:

- Schrödinger-Darstellung

  Zustände sind zeitabhängig, Operatoren zeitunabhängig z.B. $\hat{x}, \hat{p}, \hat{L}, \dots$

  $$i\partial_t |\psi\rangle_s = \hat{H} |\psi\rangle_s$$

  formale Lsg: $|\psi(t)\rangle_s = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_s$

  Mittelwerte: $\langle \hat{A}_s \rangle = {}_s\langle \psi(t) | \hat{A}_s | \psi(t)\rangle_s$

- Heisenberg-Darstellung

  Operatoren folgen einer Bewegungsglg, Zustände zeitunabhängig (sind also zeitabhängig)

  def. $\hat{A}_H(t) := e^{i\hat{H}t} \hat{A}_s e^{-i\hat{H}t}$; $|\psi\rangle_H = e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_s = |\psi(0)\rangle_s$

  $$\rightarrow \quad i\partial_t \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]$$

  $$\langle \hat{A}_H(t) \rangle = {}_s\langle \psi(0) | \hat{A}_H(t) | \psi(0)\rangle_s$$

- <u>Wechselwirkungs - Darstellung</u> (oder Dirac- Darst.)

((liegt gewissermaßen zwischen Schröd. - + Heis. - Darst.))

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\,\hat{V}$$ (Interaction = Ww.)

$$|\psi(t)\rangle_I := e^{i\hat{H}_0 t}\,|\psi(t)\rangle_S$$

$$\hat{A}_I(t) := e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{A}_S\,e^{-i\hat{H}_0 t}$$

$$\hat{V}_I(t) := e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{V}\,e^{-i\hat{H}_0 t}$$

so dass $\quad i\partial_t\,|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t}\,[-\hat{H}_0 + \hat{H}]\,|\psi(t)\rangle_S = g\,\hat{V}_I(t)\,|\psi(t)\rangle_I$

und $\quad i\partial_t\,\hat{A}_I(t) = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0]$

mit Zeitentwicklungs - Operator $\hat{U}_I(t,t_0)$

$$|\psi(t)\rangle_I := U_I(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle_I$$

folgt dann $\quad i\partial_t\,\hat{U}_I(t,t_0) = g\,\hat{V}_I(t)\,\hat{U}_I(t,t_0)$

und natürlich $\quad \hat{U}_I(t_0,t_0) = \mathbb{1}$ als "Anfangsbedingung"

↪ [Lösung dieser Dgl. : s. Ü9]

2. Beschreibung freier Teilchen. Rel. QM

relativistische Teilchen ⇒ QFT.

zunächst jedoch freie Teilchen ⇒ relativistische "klassische" QM etc.

2.1. Grundgleichungen

Klein-Gordon-Glg. (Spin 0)

Erinnerung: nichtrel. Beziehung $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

setze $E \to i\partial_t$ und $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

⇒ Schrödinger-Glg für freies Teilchen mit Masse m

relativistische Verallgemeinerung?

Physik muß Lorentzinvariant sein!

$p_\mu p^\mu = m^2 \Leftrightarrow E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2\right]\psi = 0$

also $\boxed{\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right]\psi = 0}$ "Klein-Gordon-Glg"

Bemerkung: beschreibt Eigenschaften freier $J=0$ Teilchen (z.B. π, ...)

Lösungen: später..

Dirac-Glg (Spin $\frac{1}{2}$) 1927

Idee: Dgl 2. Ordnung → (Dgl 1. Ordnung)^2

geht sofort für $\vec{p} = \vec{0}$:

$$0 = p_\mu p^\mu - m^2 \overset{\downarrow}{=} (p^0)^2 - m^2 = (p^0 - m)(p^0 + m)$$

⇒ $(p^0 - m) = 0$ oder $(p^0 + m) = 0$: 1. Ordnung in p^0

Ansatz für allgemeines $\vec{p} \neq \vec{0}$

$$p_\mu p^\mu - m^2 =: (\beta^\varrho p_\varrho - m)(\gamma^\sigma p_\sigma + m)$$

mit 8 zu bestimmenden Koeffizienten: $\beta^\varrho, \gamma^\sigma$

kein Term $\sim p$ auf rhs ⇒ $\beta^\mu \overset{!}{=} \gamma^\mu$

quad. Term: $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \overset{!}{=} \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu$ (*)