1.4 Reminder: Spez. Rel.

Elementarteilchen sind meist sehr leicht und bewegen sich schnell

→ relativistische Beschreibung! $\exists$ Inertialsysteme ...

→ wichtig! [$\in$ Theorie I] [hier: Wdh.]

alle (verallg.) Koord. werden als 4-Vektoren zusammengefasst:

Ortsvektor x^μ, $\mu = 0, \dots, 3$, $x^0 := t$, $x^1 := x$, $x^2 := y$, $x^3 := z$

$$\Rightarrow x^\mu = (t, \vec{x})$$

Viererimpuls p^μ, $p^0 := E$, $p^1 := p_x$, $p^2 := p_y$, $p^3 := p_z$

$$\Rightarrow p^\mu = (E, \vec{p})$$

Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \partial_\tau x^\mu(\tau)$ $\quad \hat{=} \frac{\partial}{\partial\tau}$

τ: Eigenzeit des Teilchens

$x^\mu(\tau)$: "Weltlinie" des Teilchens

$$u^\mu = \gamma(1, \vec{v}) \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dt}{d\tau} \quad \text{im Laborsystem}$$

massive Teilchen: $p^\mu = m u^\mu$ (Def. der Masse)

Relevanz: $(p^\mu)_{\text{vorher}} = (p^\mu)_{\text{nachher}}$ Viererimpuls-Erhaltung

Ableitungen $\partial_\mu := \partial_{x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu := \partial_{x_\mu}$

mit Hilfe des metrischen Tensors

((in Lit auch benutzt: $\text{diag}(-1,1,1,1)$))

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

bildet man die Skalarprodukte von 4-Vektoren:

$$a \cdot b := a_\mu b^\mu := g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu := a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Einstein'sche Summenkonvention! $\underset{\alpha}{}{}^{\alpha} \;\hat{=}\; \sum_{\alpha=0}^{3}$

z.B. $a^2 = a \cdot a = (a^0)^2 - \vec{a}^2$ ((kann auch < 0 sein!

$a^2 < 0$ heißt "raumartig"

> 0 zeit

$= 0$ licht))

z.B. $u^2 = \gamma^2(1^2 - \vec{v}^2) = 1$

$p^2 = m^2$

$\Box := \partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^{\,2} - \vec{\nabla}^2$

Relevanz: Skalarprodukte sind invariant

d.h. sie haben in allen Inertialsystemen den gleichen Wert

lineare Transformationen $\Lambda^\mu{}_\nu$, unter denen die Skalarprodukte invariant bleiben, bilden die Lorentzgruppe

Lorentztrafo: $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$

Invarianz: $a' \cdot b' = g_{\mu\nu} a'^\mu b'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho a^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma b^\sigma$

$\overset{!}{=} g_{\rho\sigma} a^\rho b^\sigma = a \cdot b$

$\Rightarrow \quad g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

bzw $\Lambda^T g \Lambda = g$

$(\mathrm{Det}\,\Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$

und (00-Komp.) $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$

$\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

haben also vier "Klassen" von Lorentztransformationen (LT)

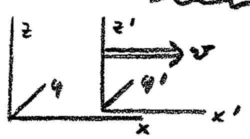
"eigentliche" LT $:= \{\mathrm{Det}\,\Lambda = +1 \,,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1\} =: \Lambda_E$

((die anderen drei: $\Lambda_P \cdot \Lambda_E$, $\Lambda_T \cdot \Lambda_E$, $\Lambda_P \cdot \Lambda_T \cdot \Lambda_E$

mit Zeitumkehr $\Lambda_T := \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$: $x^0 \to -x^0$, $\vec{x} \to \vec{x}$

und Raumspiegelung $\Lambda_P := \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$: $x^0 \to x^0$, $\vec{x} \to -\vec{x}$))

konkret: boost z.B. in x-Richtung



Uhren synchron $t = t' = 0$ bei $x = x' = 0$

Ereignis (t,x,y,z) in gestrichenen Koord.?

$t' = \gamma(t - vx)$, $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$

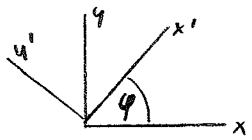
bzw. $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, $(\Lambda^\mu{}_\nu)_{x\text{-boost}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

eine bequemere Parametrisierung (γ, v nicht unabhängig):

setze $v =: \tanh\theta \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \cosh\theta$

so dass $\left(\Lambda^\mu{}_\nu\right)_{x\text{-boost}} = \begin{pmatrix} ch & -sh & 0 & 0 \\ -sh & ch & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $ch \equiv \cosh\theta$, $sh \equiv \sinh\theta$

in Analogie zu den Rotationen z.B. um z-Achse [vgl. ETTP-Vorl.]



$t' = t, \quad x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \quad z' = z$

bzw. $\left(\Lambda^\mu{}_\nu\right)_{z\text{-Rot.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $c \equiv \cos\varphi$, $s \equiv \sin\varphi$

weitere Vokabeln:

a_μ heißt "kovariant", $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ "kontravariant"

ein "Vektor" transformiert unter LT: $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$

ein "Tensor" auch: $a'^{\mu\nu\sigma\ldots} = \Lambda^\mu{}_{\bar\mu}\Lambda^\nu{}_{\bar\nu}\Lambda^\sigma{}_{\bar\sigma}\ldots a^{\bar\mu\bar\nu\bar\sigma\ldots}$

((Skalar = Tensor nullter Stufe
Vektor erster
Matrix zweiter
⋮ ⋮))

((Physik muß sich als (Komp. eines) Tensor(s) beschreiben lassen!!!))

z.B. $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} := \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen von } 0123 \\ -1 & \text{für ungerade } \text{"} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ist invariant unter eigentlichen LT's

Relevanz: oft sinnvoll ins "Schwerpunkt-System" (CMS) center-of-mass-system zu transformieren, $\sum_i \vec{p}_i = \vec{0}$