## Das CPT-Theorem

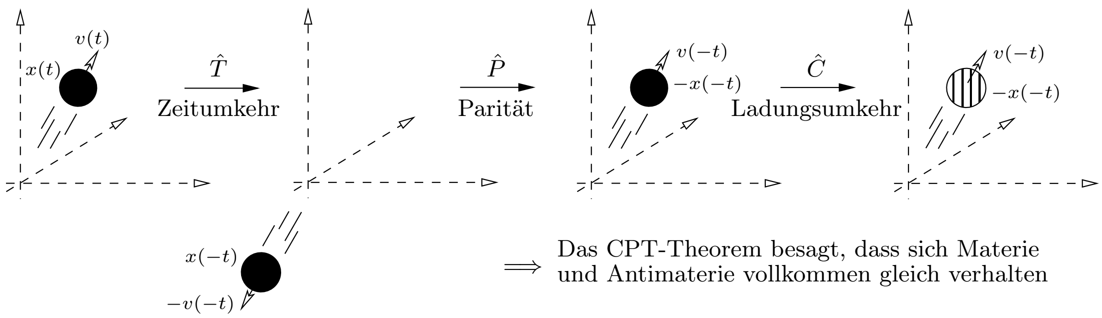



**Abbildung 1:** Illustration der Anwendung von Parität P, Ladungsumkehr C und Zeitumkehr T in der Zusammenstellung des CPT-Theorems aus Sicht eines außenstehenden Beobachters.

## Symmetrien und Erhaltungsgrößen in der Physik

| **Erhaltungsgröße / Symmetrie** | **stark** | **el.-magn.** | **schwach** |
|---|---|---|---|
| Energie $E$, Impuls $\vec{p}$, Drehimpuls $\vec{l}$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\bullet$ |
| elektrische Ladung $q$, Leptonen-/Baryonen-Zahl $n_{\mathrm{L}}/n_{\mathrm{B}}$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\bullet$ |
| Strangeness $s$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\times$ |
| Charmness (Charm) $c$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\times$ |
| Bottomness (Beauty) $b$, Topness (Truth) $t$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\times$ |
| Isospin $I_s$ | $\bullet$ | $\times$ | $\times$ |
| Parität $\hat{P}$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\times$ |
| Ladungskonjugation $\hat{C}$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\times$ |
| Zeitumkehr $\hat{T}$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\times$ |
| Raum-/Ladungumkehr-Symmetrie $\hat{C}\hat{P}$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\times$ |
| Zeit-/Raum-/Ladungsumkehr-Symmetrie $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\bullet$ |

**Tabelle 1:** Übersicht der Erhaltung „$\bullet$“ bzw. Verletzung „$\times$“ von Symmetrien und physikalischen Größen im Zusammenhang mit den einzelnen Wechselwirkungen.

## Konstituenten der betrachteten Elementarteilchen

| Pionen / $\Lambda$ | $K$-Mesonen | | $D$-Mesonen | | $B$-Mesonen | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi^0 = u\bar{u} - d\bar{d}$ | $K^0 = d\bar{s}$ | $\bar{K}^0 = s\bar{d}$ | $D^0 = c\bar{u}$ | $\bar{D}^0 = u\bar{c}$ | $B^0 = d\bar{b}$ | $\bar{B}^0 = b\bar{d}$ |
| $\pi^+ = u\bar{d}$ | $K^+ = u\bar{s}$ | $K^- = s\bar{u}$ | $D^+ = c\bar{d}$ | $D^- = d\bar{c}$ | $B^+ = u\bar{b}$ | $B^- = b\bar{u}$ |
| $\pi^- = d\bar{u}$ | | | $D_s^+ = c\bar{s}$ | $D_s^- = s\bar{c}$ | $B_c^+ = c\bar{b}$ | $B_c^- = b\bar{c}$ |
| $\Lambda = uds$ | | | | | $B_s^+ = s\bar{b}$ | $B_s^- = b\bar{s}$ |

**Tabelle 2:** Quark-Zusammensetzung der betrachteten Teilchen.

## Starke Erzeugung von Kaonen

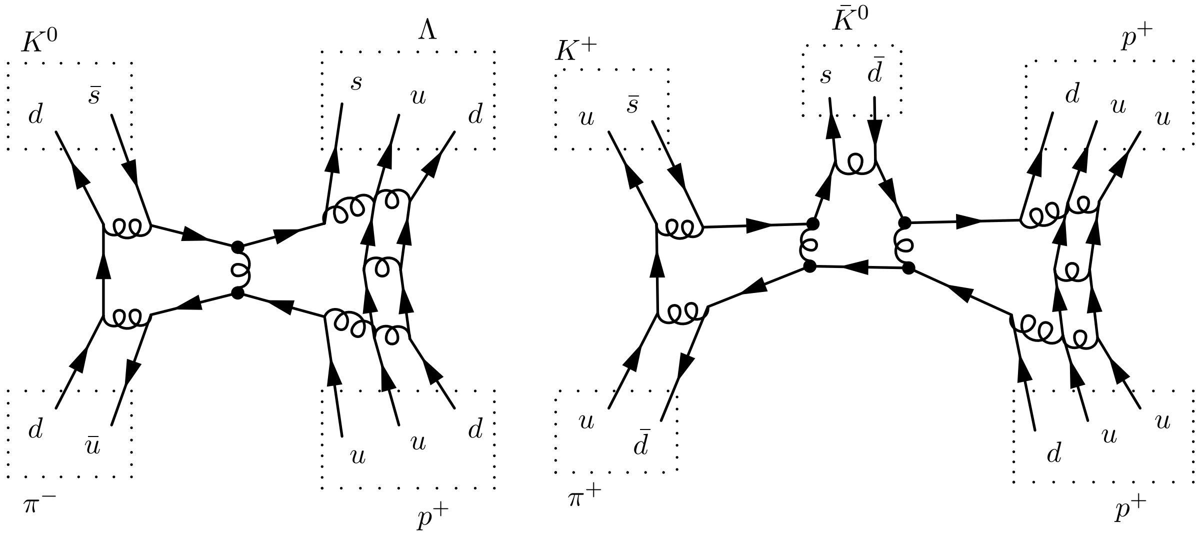



**Abbildung 2:** Erzeugung neutraler $K^0$- und $\bar{K}^0$-Mesonen durch die starke Wechselwirkung, wobei nur diejenigen Gluonen mit punktierten Vertizes am Erzeugungsprozess beteiligt sind.

## Oszillation bzw. Mischung von neutralen Kaonen


**Abbildung 3:** $K^0$-$\bar{K}^0$-Kaonen-Mischung bzw. -Oszillation durch Einfluß der schwachen Wechselwirkung.

## Zerfallsprozesse in der Weisskopf-Wigner-Approximation

**Problem:** Exponentieller Zerfall führt zu *komplexen* Energieeigenwerten:

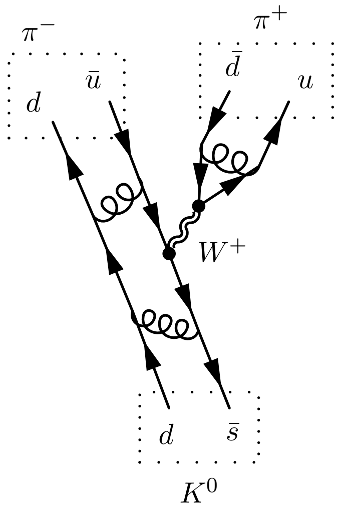
$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0 t}|\psi^{(0)}\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad A(t) = \langle\psi^{(0)}|\psi(t)\rangle = \langle\psi^{(0)}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0 t}|\psi^{(0)}\rangle$$

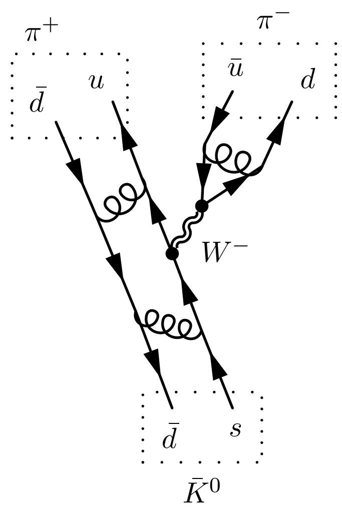
**Lösung:** Ignoriere dieses Problem und betrachte die *effektive Schrödinger-Gleichung*:

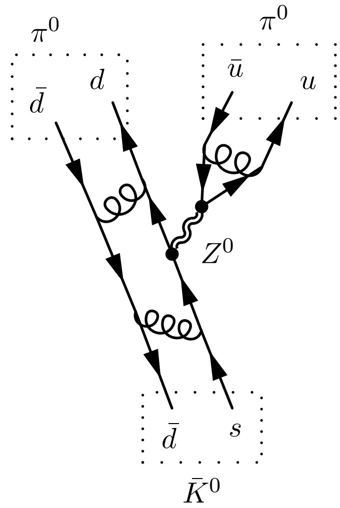
$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tau}|\psi(\tau)\rangle = \left(m - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2}\right)|\psi(\tau)\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tau}|\psi(\tau)\rangle = \hat{\mathcal{M}}|\psi(\tau)\rangle$$

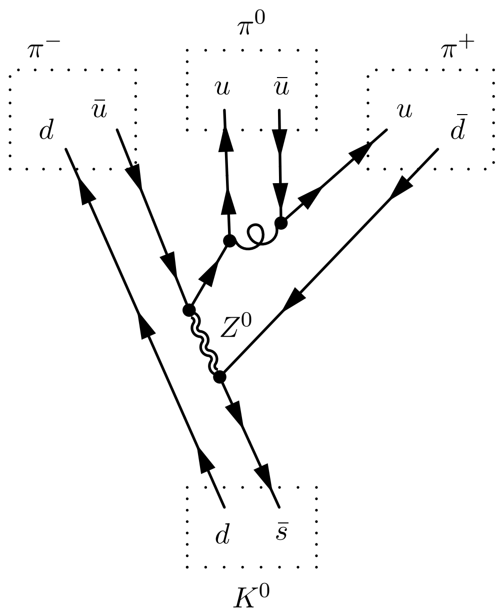
mit der sogenannten *komplexen Masse*, zusammengesetzt aus einer reellen **Masse** $m$ und der **Zerfallsrate** $\Gamma$.

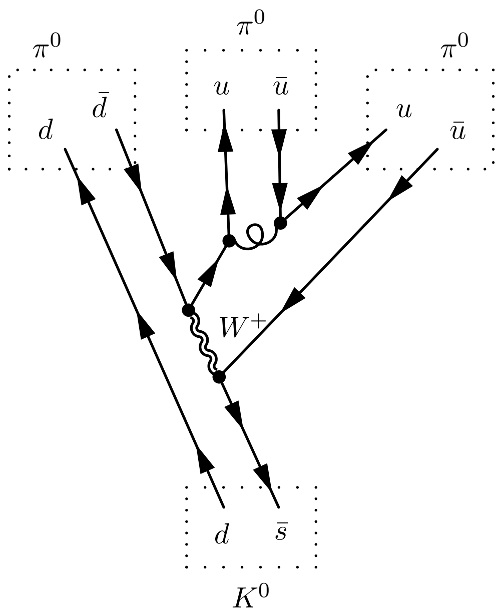
## Schwacher/Starker Pionen-Zerfall des neutralen Kaons



## Einfluss der CP-Symmetrie im Zerfallsprozess

Kaonen zeigen *pseudoskalares* Verhalten:

$$\begin{matrix} \hat{P}|K^0\rangle = -|K^0\rangle \\ \hat{P}|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \hat{C}|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \\ \hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \hat{C}\hat{P}|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \\ \hat{C}\hat{P}|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \end{matrix}$$

Eigenzustände des $\hat{C}\hat{P}$-Operators:

$$|K_1^0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\big) \qquad \hat{C}\hat{P}|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle$$

$$|K_2^0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\big) \qquad \hat{C}\hat{P}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$$

**Bei CP-Symmetrie kann die Massenmatrix keine Übergänge zwischen CP-Eigenzuständen $|K_1^0\rangle$ und $|K_2^0\rangle$ bewirken!**

$\Longrightarrow$ CP-Eigenzustände $|K_1^0\rangle$, $|K_2^0\rangle$ = $\mathcal{M}$-Eigenzustände $|K_\mathrm{S}\rangle$, $|K_\mathrm{L}\rangle$

$\Longrightarrow$ CP-Eigenzustände zeigen exponentielles Zerfallsverhalten

**Kurzlebiger** Zerfall: $K_\mathrm{S} \to \pi^+\pi^-$ und $K_\mathrm{S} \to \pi^0\pi^0$

**Langlebiger** Zerfall: $K_\mathrm{L} \to \pi^+\pi^-\pi^0$ und $K_\mathrm{L} \to 3\pi^0 = \pi^0\pi^0\pi^0$

Aus Drehimpulserhaltung (Kaonen haben Spin 0) folgt Zuordnung:

$$|K_\mathrm{S}\rangle = |K_1^0\rangle \qquad (\hat{C}\hat{P}\text{-Eigenwert } +1)$$

$$|K_\mathrm{L}\rangle = |K_2^0\rangle \qquad (\hat{C}\hat{P}\text{-Eigenwert } -1)$$

Da der langlebige Zustand einen von +1 verschiedenen Eigenwert hat, kann er deshalb nicht in zwei Pionen zerfallen.

**Aber:** $K_\mathrm{L} \to \pi\pi$ **wird beobachtet**

Führe deshalb einen Verletzungs-Parameter

$$\varepsilon_K := \frac{A(|K_\mathrm{L}\rangle \to |\pi\pi\rangle_{l=0})}{A(|K_\mathrm{S}\rangle \to |\pi\pi\rangle_{l=0})}$$

ein.

## Elemente des Standardmodells

- **Quarks im Standard-Modell:**

$$\begin{array}{llll} \overbrace{Q'_{1\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u'_\mathrm{L} \\ d'_\mathrm{L} \end{pmatrix}}^{\text{1. Familie}} & \overbrace{Q'_{2\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} c'_\mathrm{L} \\ s'_\mathrm{L} \end{pmatrix}}^{\text{2. Familie}} & \overbrace{Q'_{3\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} t'_\mathrm{L} \\ b'_\mathrm{L} \end{pmatrix}}^{\text{3. Familie}} & \Big\} \begin{array}{l}\text{linkshändige}\\ \text{Quark-Dubletts}\end{array} \\ \quad\quad u'_\mathrm{R} & \quad\quad c'_\mathrm{R} & \quad\quad t'_\mathrm{R} & \Big\} \begin{array}{l}\text{rechtshändige}\\ \text{Quark-Singuletts}\end{array} \\ \quad\quad d'_\mathrm{R} & \quad\quad s'_\mathrm{R} & \quad\quad b'_\mathrm{R} & \end{array}$$

<u>Symmetrie:</u>

linkshändige Quark-Dubletts: $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L} \times U(1)_\mathrm{Y}$

rechtshändige Quark-Singuletts: $U(1)_\mathrm{Y}$

- **Elektroschwache Lagrange-Dichte**:

$$\mathcal{L}_\mathrm{SM} = \mathcal{L}_\mathrm{Kinetik} + \mathcal{L}_\mathrm{Higgs} + \mathcal{L}_\mathrm{Yukawa}$$

- **Higgs-Feld**:

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \phi^\dagger(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{passende SU(2)-Eichung}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$$

- **Konjugiertes Higgs-Feld**:

$$\tilde{\Phi}(x) := -\mathrm{i}\sigma_2 \Phi^*(x) = \begin{pmatrix} \left(\phi^0(x)\right)^* \\ -\left(\phi^\dagger(x)\right)^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eichung von } \Phi} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

- **Lagrange-Teil der Yukawa-Wechselwirkungen**:

$$\mathcal{L}_\mathrm{Yukawa} = \sum_{i,j=1}^{3} \big[ \underbrace{C^u_{ij} \overline{Q'_{i\mathrm{L}}} \tilde{\Phi} u'_{j\mathrm{R}}}_{\substack{\text{„up“-Quark-Ww. der} \\ j\text{. Familie mit Quarks} \\ \text{der } i\text{. Familie}}} + \underbrace{C^d_{ij} \overline{Q'_{i\mathrm{L}}} \Phi d'_{j\mathrm{R}}}_{\substack{\text{„down“-Quark-Ww. der} \\ j\text{. Familie mit Quarks} \\ \text{der } i\text{. Familie}}} + \text{h.c.} \big]$$

## Konstruktion der CKM-Matrix

- Einsetzen des Higgs-Felds und Aufspalten liefert:

$$\mathcal{L}_\mathrm{Yukawa} = \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\frac{v}{\sqrt{2}} \left[ C^u_{ij} \overline{u'_{i\mathrm{L}}} u'_{j\mathrm{R}} + C^d_{ij} \overline{d'_{i\mathrm{L}}} d'_{j\mathrm{R}} + \text{h.c.} \right]}_{\text{Quarkmassen-Term}} + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \left[ C^u_{ij} \overline{u'_{i\mathrm{L}}} u'_{j\mathrm{R}} + C^d_{ij} \overline{d'_{i\mathrm{L}}} d'_{j\mathrm{R}} + \text{h.c.} \right]$$

- Diagonalisiere $3 \times 3$-Matrizen $C^u := [C^u_{ij}]$ und $C^d := [C^d_{ij}]$ über eine bi-unitäre Transformation:

$$V^\dagger_{u\mathrm{L}} C^u V_{u\mathrm{R}} = M^u := \mathrm{diag}(m_u, m_c, m_t) \qquad \text{und} \qquad V_{u\mathrm{L}}, V_{u\mathrm{R}}, V_{d\mathrm{L}}, V_{d\mathrm{R}} \in \mathrm{U}(3)$$
$$V^\dagger_{d\mathrm{L}} C^d V_{d\mathrm{R}} = M^d := \mathrm{diag}(m_d, m_s, m_b) \ ,$$

  Die Diagonalmatrizen $M^u$ und $M^d$ enthalten die **Quark-Ruhemassen**.

- Definiere **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Quarkmischungs-Matrix**

$$V_\mathrm{CKM} := V_{u\mathrm{L}} V^\dagger_{d\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \in U(3)$$

## Parametrisierungen und Verletzungs-Bedingung

- **Standard-Parametrisierung** der CKM-Matrix:

$$V_{\mathrm{CKM}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Rotation in 2-3-Ebene}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Rotation in 1-3-Ebene} \\ \text{und Phasenfaktor } \delta_{\mathrm{KM}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rotation in 1-2-Ebene}}$$

- **Wolfenstein-Parametrisierung** (Approximation):

$$V_{\mathrm{CKM}} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - \mathrm{i}\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\bar\rho - \mathrm{i}\bar\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} &\lambda = \sin\theta \\ &A\lambda^2 = \sin\varphi \\ &\sin\vartheta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} = A\lambda^3(\rho - \mathrm{i}\eta) \\ &(\bar\rho, \bar\eta) := (\rho,\eta)(1-\tfrac{\lambda^2}{2}) \end{aligned}$$

**Satz (CP-Verletzung im Quark-Sektor):** *Eine Phase $\delta_{\mathrm{KM}} \neq k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ in der Standard-Parametrisierung der CKM-Matrix führt zu einer Verletzung der $\hat{C}\hat{P}$-Invarianz der Lagrange-Dichte.*

## Unitaritäts-Dreiecke

- Unitaritätsbedingung $V_{\mathrm{CKM}}^\dagger V_{\mathrm{CKM}} = V_{\mathrm{CKM}} V_{\mathrm{CKM}}^\dagger = \mathbb{E}$ in Komponentenform:

$$\sum_\alpha V_{i\alpha}^* V_{j\alpha} = \delta_{ij} \qquad \text{und} \qquad \sum_i V_{i\alpha}^* V_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

- **Unitaritäts-Dreieck**: Betrachte Summanden (d.h. komplexe Zahlen) als Vektoren in $\mathbb{C}$.

$$\sum_{i=1}^{3} V_{i1} V_{i3}^* = V_{11}V_{13}^* + V_{21}V_{23}^* + V_{31}V_{33}^* = V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$$

- **Reskaliertes Unitaritäts-Dreieck:** Richte eine Dreiecksseite zu $\mathbb{R}$ aus und normiere diese.
- **Winkel des Dreiecks:**

$$\alpha := \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right) \qquad \beta := \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right) \qquad \gamma := \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right)$$

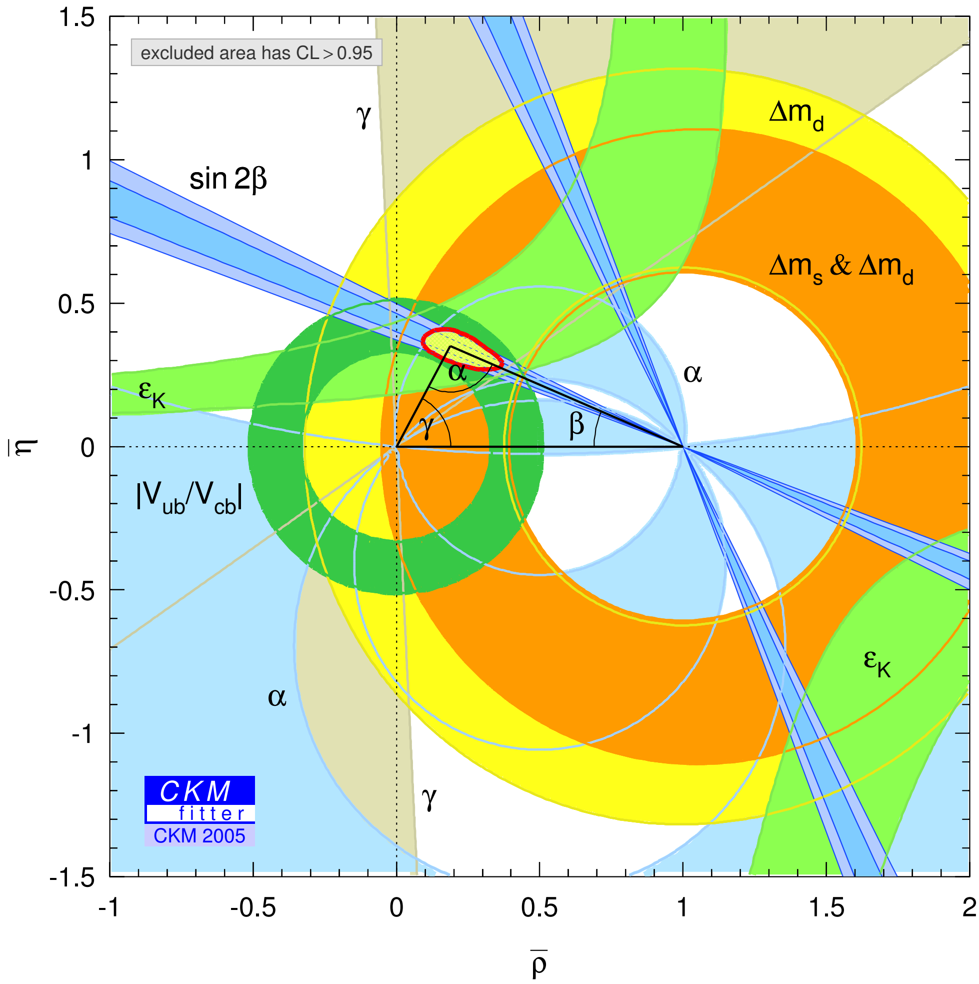



**Abbildung 4:** Fehlerbereiche des Standardmodells und Darstellung des reskalierten Unitaritäts-Dreiecks.