

QCD und asymptotische Freiheit

Einleitung

In den sechziger Jahren und noch zu Anfang der Siebziger, gab es viele experimentelle Befunde, die sich im Rahmen der damaligen theoretischen Modelle nicht erklären ließen. Eines der wohl prominentesten Beispiele ist das Bjorken-Skalenverhalten, an das an dieser Stelle noch einmal kurz erinnert sei:

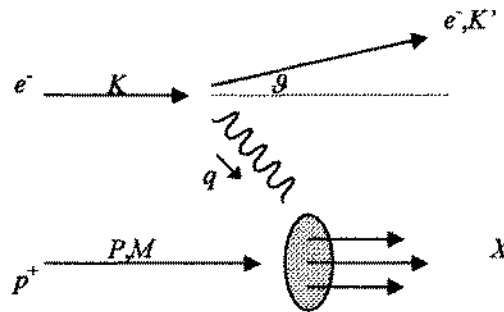


Abb.1: Tiefinelastische $e p^+$ -Streuung

Es gilt dann für den Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \left(\frac{\alpha_{em}}{2E \sin^2(\frac{\theta}{2})} \right)^2 \cdot F(Q_E^2, x) \quad \text{mit} \quad Q_E^2 = -q^2 \quad \text{und} \quad x = \frac{Q_E^2}{2q \cdot P}$$

Das von Bjorken postulierte Skalenverhalten besagt nun, dass wenn der Impulsübertrag nur hinreichend groß wird (größer als ein GeV), so ändert sich die Abhängigkeit der Funktion F :

$$F(Q_E^2, x) \rightarrow F(x)$$

Dieses Verhalten wurde am SLAC experimentell bestätigt.

Ein theoretisches Modell dieses Phänomen zu beschreiben ist das Partonmodell, dessen Teilchen später mit den Quarks identifiziert wurden. Damit dieses jedoch eine Erklärung liefert ist es nötig, dass diese sich auf kurze Distanzen wie freie Teilchen verhalten, ein Phänomen, dass als asymptotische Freiheit bekannt ist.

Das Problem war es nun eine Theorie zu finden, welche asymptotisch frei ist.

1. Grundlagen der Quantenchromodynamik

Bei der Quantenchromodynamik handelt es sich um die Theorie der starken Wechselwirkung, d.h. es werden die Wechselwirkungen von Quarks und Gluonen beschrieben.

Quarks treten dabei bekanntlich in drei Farben (rot, blau und grün) auf, Entsprechendes gilt auch für Antiquarks (antirrot, antiblau und antigrün). Die Kräfte, die zwischen den Quarks wirken, werden vermittelt durch die Gluonen, welche im Gegensatz zu den Photonen, den Überträgern der elektromagnetischen Kraft, auch untereinander wechselwirken, was die Theorie wesentlich komplizierter macht.

Die grundlegende Symmetrie ist die $SU(3)_C$ -Farbsymmetrie, eine Eichtransformation dann gegeben durch:

$$q(x) \rightarrow e^{ig\xi_A(x)T^A} q(x) \quad \text{wobei } T^A = \frac{1}{2}\lambda^A$$

$$G^\mu(x) \rightarrow e^{-ig\xi_A(x)C^A} G^\mu(x) - \partial^\mu \xi(x) \quad C_{BC}^A = -if^{ABC}$$

Die ξ^A sind die Gruppenparameter, während die T^A die Generatoren der $SU(3)$ darstellen, die gewöhnlich durch die **Gell-Mann Matrizen** λ^A ausgedrückt werden. Bei diesen handelt es sich um spurlose, hermitesche 3×3 -Matrizen:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \text{Tr } T^A T^B = \frac{1}{2} \delta^{AB}$$

1971 wurde von t'Hooft bewiesen, dass lediglich eichinvariante Theorien renormierbar sein können. Renormierbarkeit ist jedoch von zentraler Bedeutung, weshalb dies natürlich auch eine Anforderung an die Lagrangedichte der QCD ist. Diese hat dann die folgende Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu A} + \bar{q}_a (i\gamma^\mu D_\mu - m)^{ab} q_b \quad \text{mit } G_{\mu\nu}^A \equiv \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A - g_s f^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C$$

$$\text{und } (D_\mu)^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} + ig_s (T^A G_\mu^A)^{ab}$$

wobei $A, B, C = 1, \dots, 8$ Gluonenindizes und $a, b = 1, 2, 3$ Farbindizes sind, die Summation über die einzelnen Quarks wurde hierbei unterdrückt. Schließlich sind noch die Gruppenstrukturkonstanten f^{ABC} mit den Generatoren T^A verknüpft über

$$[T^A, T^B] = if^{ABC} T^C$$

Mit den oben aufgeführten Matrizen lassen sich die $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ Strukturkonstanten f^{ABC} bestimmen, wobei sich herausstellt, dass der größte Teil dieser null ist. Man beachte zunächst, dass sich direkt aus der Definition ergibt, dass f^{ABC} antisymmetrisch unter Vertauschung der Parameter ist, d.h. $f^{ABC} = -f^{BAC} = -f^{ACB} = \dots$

Es lässt sich dann zeigen, dass mit den zugehörigen Permutationen lediglich neun Strukturkonstanten ungleich null sind:

$$f^{123} = 1 \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{316} = f^{637} = \frac{1}{2} \quad f^{458} = f^{678} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Zurück zur Lagrangedichte, setzt man die nebenstehenden Ausdrücke explizit ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen die folgende Struktur, an denen man alle Vertizes, die im Rahmen dieser Theorie beschrieben werden, ablesen kann:

$$\mathcal{L}_{QCD} \approx \bar{q}q + G^2 + g_s t \cdot q\bar{q}G + g_s f \cdot G^3 + g_s^2 f^2 \cdot G^4$$

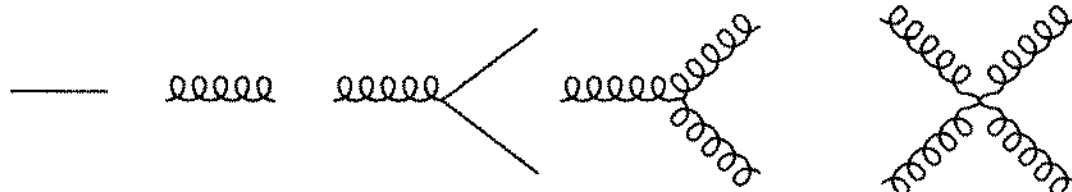


Abb. 2: Vertizes der Quantenchromodynamik

D.h. ein wesentlicher Unterschied im Vergleich zur QED findet sich darin, dass auch die Gluonen untereinander wechselwirken, was sich anschaulich dadurch erklären lässt, dass sie selbst eine Farbladung besitzen. Um welche es sich dabei handelt kann man sich sehr einfach überlegen, indem man den nachfolgenden Prozess betrachtet:

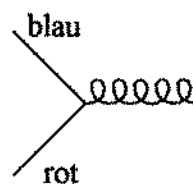


Abb.3: Quark-Gluon-Vertex, wobei die Zeitrichtung von unten nach oben weist

Ähnlich wie im Rahmen der QED die elektrische Ladung erhalten bleibt, gilt dies für die Farbladung in der QCD. Demnach muss das Gluon sowohl die „einlaufende“ Farbe rot (weg-) tragen, als auch die Farbe antiblau. Allgemein tragen Gluonen stets eine Farbe und eine Antifarbe.

Die Wechselwirkung der Gluonen untereinander scheint zunächst ein „erstaunliches“ Resultat zu sein, ist man aus der QED doch eine ganz andere Situation gewohnt. Doch es ist tatsächlich so, dass dies direkt aus der Verwendung nicht abelscher Symmetriegruppen folgt, was man auch ganz leicht einsieht: Man betrachte dazu noch einmal die Definition der Gruppenstrukturkonstanten:

$$[T^A, T^B] = if^{ABC} T^C$$

offensichtlich verschwinden alle Kommutatoren, falls eine abelsche Gruppen zugrunde liegt, d.h. insbesondere sind dann alle f^{ABC} null, was für die Lagrangedichte bedeutet:

$$\mathcal{L}_{QCD} \approx \bar{q}q + G^2 + g_s t \cdot q\bar{q}G + g_s f \cdot G^3 + g_s^2 f^2 \cdot G^4 \rightarrow \bar{q}q + G^2 + g_s t \cdot q\bar{q}G$$

und man erhält die gewohnten Vertizes der QED.

Abschließend soll noch eine mögliche Interpretation der $SU(3)_C$ gegeben werden. Diese lässt sich bekanntlich durch 3×3 -Matrizen darstellen, weshalb es nahe liegt Farbzustände als dreikomponentige Vektoren zu schreiben:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es beschreiben dann die Generatoren der $SU(3)$ die Transformationen der Einheitsvektoren. Die übliche Wahl für die Generatoren sind, wie bereits erwähnt, die Gell-Mann-Matrizen λ , die sich aus den Pauli-Matrizen konstruieren lassen. Es sind dabei r , g und b gleichzeitige Eigenvektoren der Matrizen λ^3 und λ^8 , bei denen es sich um Diagonalmatrizen handelt. Mit diesen Matrizen als Basis liegen die Eigenvektoren wie folgt:

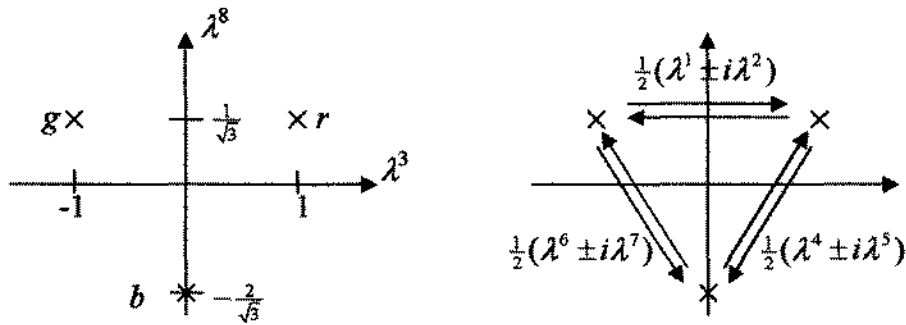


Abb. 4: Lage der Basisvektoren r , g , b , wobei die Komponenten gerade die Eigenwerte von λ^3 und λ^8 sind. Die acht Gell-Mann Matrizen bzw. Linearkombinationen davon transformieren diese und bilden sie aufeinander ab.

Aus der rechten oberen Abbildung erkennt man, dass sich im Farbraum die Gluonen mit Hilfe von Matrizen schreiben lassen als:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda^1 + i\lambda^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq r\bar{g} & \frac{1}{2}(\lambda^1 - i\lambda^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq g\bar{r} \\ \frac{1}{2}(\lambda^4 + i\lambda^5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq r\bar{b} & \frac{1}{2}(\lambda^4 - i\lambda^5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq b\bar{r} \\ \frac{1}{2}(\lambda^6 + i\lambda^7) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \bar{b}g & \frac{1}{2}(\lambda^6 - i\lambda^7) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \triangleq b\bar{g} \\ \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) \end{aligned}$$

2. Asymptotische Freiheit

Ein wesentlicher experimenteller Befund ist die Größe der Kopplungskonstanten, diese ist nämlich im Falle der QED wesentlich kleiner als jene für die QCD. Dies führt zu Komplikationen, da Prozesse im Rahmen der QED mit Hilfe von Reihenentwicklungen in der Kopplungskonstante berechnet werden, diese ist hier klein genug, dass höhere Potenzen sehr schnell vernachlässigt werden können. In der QCD ist dies nicht mehr möglich, da späteren Termen größere Bedeutung zukommt, weshalb Reihenentwicklungen i.A. keine verwertbaren Ergebnisse liefern.

Ein glücklicher Befund ist nun die Tatsache, dass die QCD asymptotisch frei ist. Unter dem Begriff der **asymptotischen Freiheit** versteht man das Verhalten, dass sich Quarks auf sehr kurzen Distanzen (z.B. innerhalb von Hadronen) wie freie Teilchen bewegen, kurze Distanzen sind dabei gleichbedeutend mit großen Energien.

Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass für große Energien die Kopplungskonstante klein werden muss, somit werden diese Bereiche zugänglich für eine sinnvolle Reihenentwicklung. Umgekehrt findet sich, dass für große Abstände die gegenseitige Anziehung zwischen Quarks immer größer wird, was zunächst aus einigen einfachen Überlegungen im Vergleich zur QED abgeleitet werden soll:

Betrachtet man eine Ladung e_0 im Raum, so führt diese zu einem Effekt, der als **Polarisation des Vakuums** bezeichnet wird, d.h. es bilden sich virtuelle e^+e^- -Paare:

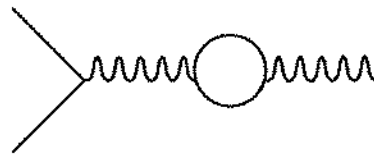


Abb. 5: Darstellung der Vakuumpolarisation mit Hilfe eines Feynmandiagramms erster Schleifenordnung

Das Elektron zieht auf Grund der elektrostatischen Anziehungskraft die virtuellen Positronen an sich heran, und schirmt sich dadurch ab, so dass man in einer gewissen Entfernung anstelle der **nackten Ladung** e_0 eine schwächere effektive Ladung e misst. Dies hat Auswirkungen auf die Kopplungskonstante, so macht man im Rahmen der QED folgende Feststellung, wenn man α_{em} für verschiedene Energien vergleicht:

$$\alpha(m_e^2) = \frac{1}{137,036} \quad m_e = 0,511 \text{ MeV} \quad \alpha(M_Z^2) = \frac{1}{129} \quad M_Z = 91,9 \text{ GeV}$$

d.h. mit zunehmender Energie steigt die Kopplungskonstante.

Ein ähnliches Phänomen beobachtet man auch im Falle von Farbladungen, auch hier entstehen virtuelle Quark-Antiquark-Paare, als auch Gluonen, die zu einer Farbladungspolarisation führen:

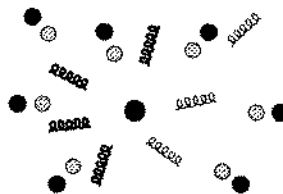


Abb.6: Schematische Darstellung der Farbpolariation des Vakuums

Starke Wechselwirkung unterscheidet dabei nicht zwischen Quark oder Antiquark, da aber das betrachtete Quark auch elektrisch geladen ist, werden virtuelle Antiquarks angezogen. Es kommen nun die Gluonen ins Spiel, deren Effekt sich, da sie elektrisch neutral sind und sowohl Farbe als auch Antifarbe tragen, nicht qualitativ ableiten lässt, lediglich die Auswertung von Feynman-Diagrammen bringt Aufschluss. Die Auswertung wird weiter unten folgen, zunächst muss man sich jedoch überlegen, was eigentlich gezeigt werden soll.

Die Frage, die es letztlich zu klären gilt ist, ob das oben vorgestellte Modell der starken Wechselwirkung asymptotisch frei ist, bzw. zunächst einmal wie es überhaupt möglich ist dies zu prüfen. Es stellt sich heraus, dass die **Renormierungsgruppengleichungen** eine sehr wichtige Rolle spielen, eine präzise Herleitung dieser erfordert jedoch Methoden aus der QFT und selbst dann noch sehr aufwendig. Sie sollen hier deshalb aus einigen einfachen Überlegungen abgeleitet werden.

Die grundlegende Frage, die sich aus der Abstandsabhängigkeit der Ladung ergibt ist, welche Ladung man zur Berechnung von Prozessen heranziehen muss. Auf Grund der Polarisation des Vakuums kann die Ladung nämlich sehr unterschiedlich gegeben sein:

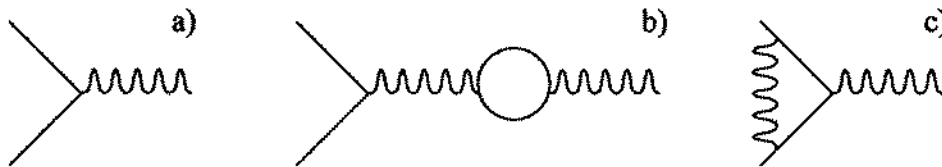


Abb.7: Mögliche Feynman-Diagramme

Hierbei werden zwei Arten von Korrekturen unterschieden, zum einen die **Selbstenergiegraphen** bzw. **Vertexkorrekturgraphen** (z.B. wie Abb.7 c)) und zum anderen die **Vakuumpolarisationen** (7b)).

Für diese stellt sich jedoch heraus, dass die Schleifenkorrekturen i.A. divergieren, die Behandlung solcher Divergenzen ist Gegenstand der Renormierbarkeitstheorie. Im Rahmen dieser werden zwei Modifikationen an den ursprünglichen Gesetzen vorgenommen:

- Die physikalisch messbare Ladung an einer Energie- (oder Abstands-)skala μ beinhaltet Beiträge der Vakuumpolarisation. Man ersetze deshalb (renormiere) die nackte Ladung q_0 durch die gemessene Ladung $q(\mu^2)$.
- Man füge **counterterms** ein.

Auf den zweiten Teil soll hier nicht weiter eingegangen werden, da die genaue Bestimmung der counterterms wieder Methoden der QFT erfordert, die erste Modifikation wird bereits weitere Einsichten liefern. Damit nämlich dieses Verfahren physikalisch sinnvoll ist, dürfen sich physikalisch messbare Größen nicht ändern, insbesondere muss für die Amplitude gelten:

$$-i\mathcal{M}(q_0^2) \stackrel{!}{=} -i\mathcal{M}(q^2(\mu^2))$$

$$\text{wobei } d\mathcal{M}(q^2(\mu^2)) = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mu^2} d\mu^2 + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q^2} dq^2 = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mu^2} d\mu^2 + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q^2} \frac{\partial q^2}{\partial \mu^2} d\mu^2$$

Durch Differenzieren erhält man somit die sog. Renormierungsgruppengleichung:

$$\mu^2 \frac{d\mathcal{M}}{d\mu^2} = \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial q^2}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial q^2} \right) \mathcal{M} \stackrel{!}{=} 0$$

Unter Berücksichtigung weiterer Korrekturen würde man allgemeiner erhalten:

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d\mathcal{M}}{d\mu^2} &= \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial g}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial g} + \mu^2 \frac{\partial m}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial m} \right) \mathcal{M} \stackrel{!}{=} 0 \\ &= \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(\mu^2) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m(\mu^2) m \frac{\partial}{\partial m} \right) \mathcal{M} = 0 \end{aligned}$$

wobei lediglich noch $g \propto q^2$ verwendet wurde.

Hierdurch sind implizit zwei **Renormierungsgruppenkoeffizienten** β und γ_m definiert worden, die üblicherweise **β -Funktion** und **anomale Massendimension** genannt werden:

$$\beta(\mu^2) = \mu^2 \frac{\partial g}{\partial \mu^2} \quad \text{und} \quad \gamma_m(\mu^2) = -\frac{\mu^2}{m} \frac{\partial m}{\partial \mu^2}$$

Die Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen zeigen zwei wesentliche Eigenschaften renormierter Quantenfeldtheorien, was zum einen eine laufende Kopplung $\alpha(Q^2)$ und eine laufende Masse $m(Q^2)$ ist.

Die γ_m -Funktion ist im Weiteren nicht von Interesse und wurde lediglich der Vollständigkeit wegen angegeben. Eine genaue Herleitung der obigen Gleichungen findet sich z.B. in [QCD83] (\rightarrow Callan-Symanzik Equation).

Mit der β -Funktion hat man jetzt ein Werkzeug gefunden, das Verhalten der Kopplungskonstanten genauer studieren zu können. Es zeigt sich, dass die Nullstellen der β -Funktion von entscheidender Bedeutung für das Verhalten der Kopplungskonstanten im Falle eines sehr großen Impulsaustauschs (**ultravioletter Grenzfall**), als auch für sehr geringen Übertrags (**infraroter Grenzfall**) sind. Dies lässt sich sehr leicht an zwei Beispielen veranschaulichen:

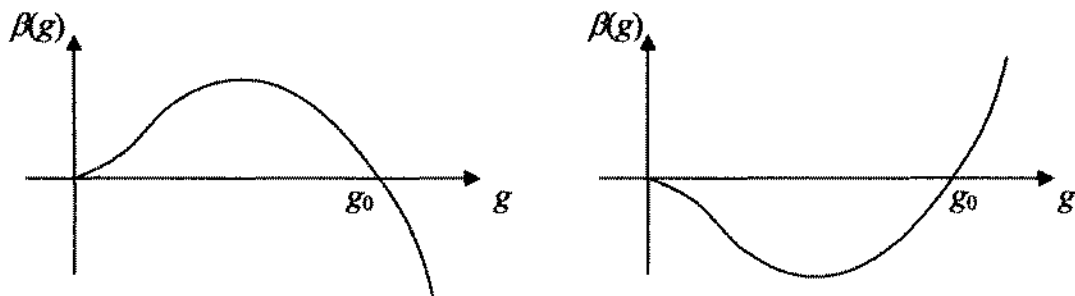


Abb. 8: Möglicher Verlauf der β -Funktion bei gegebenen Nullstellen

Fall 1: Ist $\beta(g) > 0$, so wird g größer mit anwachsendem Q^2 . Dies ist offensichtlich der Fall für $g < g_0$, g nähert sich dort dem Wert g_0 an, wenn Q^2 ansteigt. Das entgegen gesetzte Verhalten beobachtet man für $g > g_0$, hier ist $\beta(g) < 0$, und g sinkt mit zunehmendem Q^2 . Man bezeichnet g_0 deswegen auch als **stabilen ultravioletten Fixpunkt**. Man beachte, dass dieser Punkt nicht stabil im Falle des infraroten Limes ist, was aber gerade für den Punkt $g = 0$ gilt.

Abbildung 7a) gibt eine Theorie wieder, deren Kopplungskonstante bei geringem Impuls-transfer verschwindet, und bei großem einen konstanten Wert annimmt.

Fall 2: Hier haben die Werte $g = 0$ und $g = g_0$ umgekehrte Bedeutung, d.h. die Kopplungskonstante verschwindet für große Impulsüberträge, was gerade der asymptotischen Freiheit entspricht. Für kleine Impulswerte hingegen nimmt g einen konstanten Wert g_0 an.

Will man also zeigen, dass es asymptotische Freiheit im Rahmen der Quantenchromodynamik gibt, so ist das obige Verhalten nachzuprüfen, dass also die β -Funktion im entscheidenden Bereich kleiner null ist.

Der allgemeine Fall lässt sich an dieser Stelle leider nicht durchführen, da wieder sehr viele Mittel der QFT und der Renormierbarkeitstheorie benötigt werden, es soll jedoch die Quark-Quark-Streuung mit 1-Schleifenkorrekturen betrachtet werden.

Man gehe aus, von dem Diagramm oben links, bei welchem man eine effektive Kopplung g_R annehme. Es sind dann folgende Korrekturen mit ein zu beziehen:

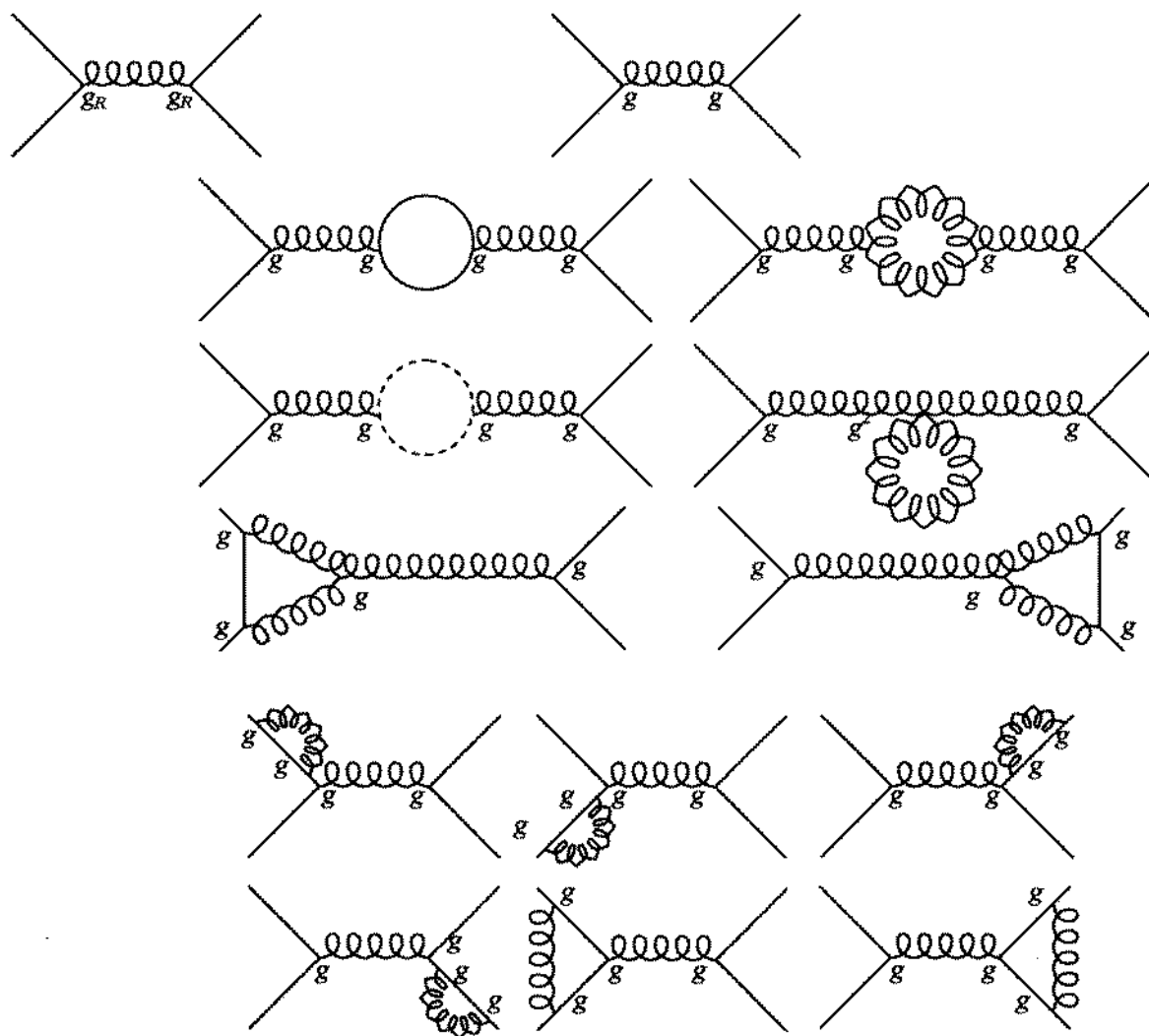


Abb.9: Ein-Schleifen-Korrekturen der Quark-Quark-Streuung

Die gestrichelte Linie, die bei einem der obigen Diagramme auftaucht ist ein sog. **Fadjev-Popov-Ghost**. Bei diesen handelt es sich um zusätzliche, nicht physikalische Teilchen, die gerade die nicht-physikalischen Zustände kompensieren.

Berechnung der Amplituden und anschließende Summation führt zu dem folgenden Ergebnis (eine vollständige Rechnung findet sich in [QCD89] auf Seite 200 – 212 (!), also ein wenig länglich):

$$M_m^{a(\text{total})} = -i \frac{\lambda^a}{2} g \gamma_\mu \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{11}{6} N_C - \frac{1}{3} N_F \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(-\frac{k^2}{m^2} \right) + \dots \right) \right)$$

wobei die Konstanten N_C bzw. N_F für die Anzahl der Farben bzw. die Anzahl der Flavours stehen. Die Größe ε ist eine Hilfsgröße, die eingeführt werden muss, um eventuelle Divergenzen zu umgehen, die bei bestimmten Integralen auftreten können. Man ersetzt deswegen

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \quad \text{mit} \quad D = 4 - \varepsilon$$

und untersucht später ggf. den Grenzwert $D \rightarrow 4$, ein Verfahren, welches unter dem Begriff der **dimensionalen Regularisierung** bekannt ist. Im hier betrachteten Fall erübrigt sich das Problem aber von alleine, da sich für die renormierte Kopplungskonstante, durch Abzug der Korrektur bzgl. einer renormierten Skala μ^2 ergibt:

$$\begin{aligned} g_R &= g - \frac{g^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{6} N_C - \frac{1}{3} N_F \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(-\frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(-\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right) \\ &= g + \frac{g^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{6} N_C - \frac{1}{3} N_F \right) \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} \right) \end{aligned}$$

Verwendet man weiter die Definition der β -Funktion, so liefert dies:

$$\beta = \mu^2 \frac{\partial g_R}{\partial \mu^2} = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{6} N_C - \frac{1}{3} N_F \right) \left(\frac{2\mu^2}{\mu^4} \right) \mu^2 = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F \right) + O(g^5)$$

$$\text{also} \quad \beta(g) = -\beta_0 g^3 + O(g^5) \quad \text{wobei} \quad \beta_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3} N_F \right) = \frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{3} (33 - 2N_F)$$

was größer null, falls $N_F < 17$. Hätte man höhere Ordnungen in Betracht gezogen, ließen sich weitere Koeffizienten der β -Funktion bestimmen, für die sich folgende Ausdrücke ergeben:

$$\beta_1 = \frac{1}{16\pi^2} \left(102 - \frac{38}{3} N_F \right) \quad \beta_2 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} N_F + \frac{325}{54} N_F^2 \right)$$

Iteriert man die obigen Korrekturen, so ergibt sich eine geometrische Reihe, für deren Ergebnis gilt:

$$g_R^2(-k^2) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} N_C - \frac{2N_F}{3} \right) \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} \right)}$$

woraus sich letztlich die Kopplungskonstante als Funktion des Impulsaustauschs ergibt:

$$\alpha_s(-k^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \left(11 - \frac{2N_F}{3}\right) \ln\left(-\frac{k^2}{\mu^2}\right)} \equiv \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)} \quad \text{mit} \quad \beta_0 = \left(11 - \frac{2N_F}{3}\right)$$

und $\Lambda^2 = \mu^2 e^{-4\pi/\beta_0 \alpha_s(\mu^2)}$

Nimmt man hierbei noch die Korrekturen von β_1 hinzu, so findet sich:

$$\alpha_s^{(1)}(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_F) \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)} \left(1 - 3 \frac{153 - 19N_F}{(33 - 2N_F)^2} \cdot \frac{\ln \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)} \right)$$

wobei man sieht, dass für $Q^2 \rightarrow \infty$ zum einen $\alpha_s^{(1)}(Q^2)/\alpha_s(Q^2) \rightarrow 1$ und zum anderen beide logarithmisch verschwinden.

Es lässt sich jetzt die eingangs gestellte Frage der Farbvakuumpolarisation beantworten. Dazu betrachte man den Verlauf der Kopplungskonstanten in Abhängigkeit von der Energie:

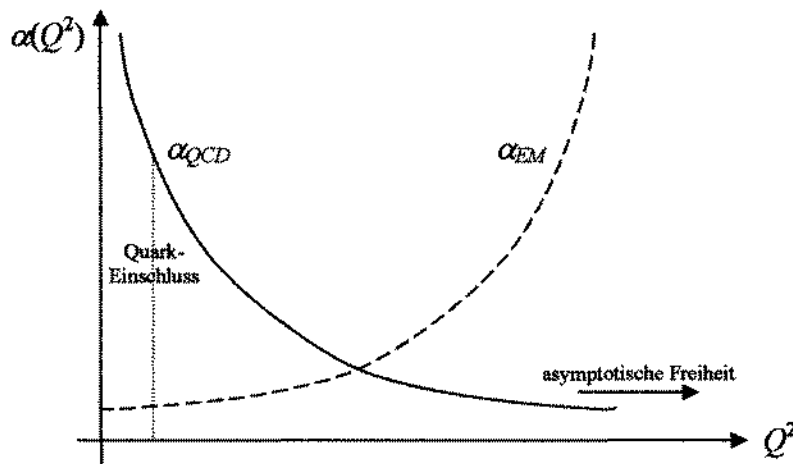


Abb.10: Energieabhängigkeit der Kopplungskonstanten der QCD und der QED

Es findet sich also, dass der Effekt der Gluonen im Falle der QCD-Vakuumpolarisation der Wirkung der Quark-Antiquark-Paaren entgegengesetzt ist, und diese dominiert. Anders als die effektive elektrische Ladung wird daher die effektive Farbladung bei Annäherung an das betrachtete Quark immer kleiner.

Fazit: Es stellt sich letztlich heraus, dass es sich bei QCD um eine asymptotisch freie Theorie handelt, also die Kopplungskonstante bei großen Energie verschwindet. Man sollte sich dabei vor Augen halten, dass sich dies aus dem gewählten Ansatz, der Verwendung der $SU(3)_C$ -Symmetrie ergibt, woraus sich dann auch die hier betrachteten Teilchen ableiten lassen.

Literatur:

- [QCD83] F.J.Ynduráin: **Quantum Chromodynamics**, Springer, 1983
- [QCD89] Greiner, Schramm, Stein: **Quantum Chromodynamics**, Springer, 1989