Einf. i.d. Meth. d. theor. Physik I → EMTP

YS, E6-118, Mo 13-14

www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/emtp1

Gratu

warum Physik? - Sterne, Natur, etc
- staunen, fragen warum?
- Sprache entwickeln

Orga Vorl Mo 10.15 - 11.00, 11.05 - 11.50 (H6)

in Pause: Ü-Blatt holen

heute: 11.30 —"— , Ü-Liste eintragen

vor Vorl. Ü-Lsn in Karton

Klausur: 11.2.08, 31.3.08

Literatur Schulz, Physik mit Bleistift
Teubner, 6. Aufl 2006, 388 S, 25 €

Lang / Pucker, Math. Methoden der Physik
Spektrum Akad. Verlag, 2. Aufl 2005, 713 S, 40 €

Fischer / Kaul, Mathematik für Physiker Bd 1
Teubner, 5. Aufl. 2005, 584 S, 38 €

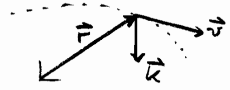
Großmann, Math. Einführungskurs für die Physik
Teubner, 9. Aufl. 2005, 366 S, 30 €

Inhalt Vektoren, Kinematik, Newton, Tensoren,
Funktionen, Bewegungsgleichungen

1. Vektoren

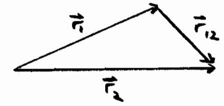
Richtungs-Angaben. Pfeile!

Bezugspunkt vereinbaren → Ursprung



Ortsvektor $\vec{r}$: Pfeil Ursprung → Physik

Verschiebungsvektor: Pfeil Punkt → Punkt

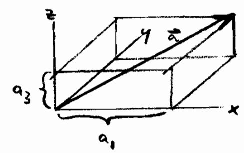


Länge des Pfeils: Betrag $|\vec{r}| = r$, $|\vec{v}| = v$, $|\vec{k}| = k$ etc.

⇒ Pfeil hat Richtung, Betrag, Ausgangspunkt

Einheitsvektor: $\frac{1}{a}\cdot\vec{a} = \vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$; $\vec{a} = a\vec{e}$

Komponenten: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$



Systematik: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ etc
$\vec{r} = (x, y, z)$ ausnahmsweise

alle Komponenten haben gleiche Dimension
$[a_1] = [a_2] = [a_3] = [a] = [\vec{a}]$

Bsp: $[v_3] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = \text{m/s}$

$\vec{v} = (1\,\text{m/s}, 0, 2\,\text{m/s}) = (1, 0, 2)\,\text{m/s}$

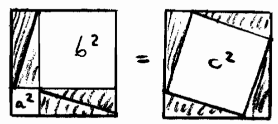
⇝ Betrag: $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
wegen Pythagoras: $a^2 = a_3^2 + L^2$, $L^2 = a_1^2 + a_2^2$

⇝ Multiplikation: $c\vec{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)$
anschaulich klar: Schatten-Vervielfachung

⇝ Addition: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

Pythagoras? einfach!

geom. Beweis:



(mehr → Ü3)

Vektoren $\vec{a}$. $(= \vec{a})$

bisher: $|\vec{a}|$, $c\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$

heute: weitere Verknüpfungen von 2 Vektoren

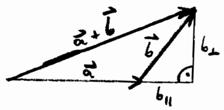
$\hookrightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}$, $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}$, $\underline{\vec{a}\times\vec{b}}$, $\vec{a}\circ\vec{b}$, „$\vec{a}\,\vec{b}$"

Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$

Motivation

(M1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)

$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 2\cdot \text{Rest} =: 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ definiert die rechte Seite der Gleichung



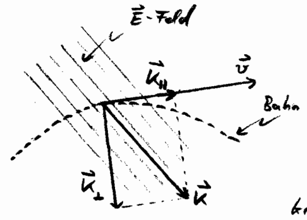
haben $\vec{b}$ zusammengesetzt

$\vec{b} = \vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel$ parallel zu $\vec{a}$

"Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$"

also: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(a+b_\parallel)^2 + b_\perp^2}_{\text{Pythagoras}} - a^2 - b_\perp^2 - b_\parallel^2\Big] = a\,b_\parallel$

[(M2)



geladenes Teilchen (Ladung q) im elektrischen Feld $\vec{E}$.

$\vec{K} \mathrel{\underset{\vert}{=}} q\vec{E}$

$= \vec{K}_\perp + \vec{K}_\parallel$ parallel zu $\vec{v}$; beschleunigt

krümmt Bahn

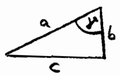
also macht auch hier eine Definition $K_\parallel =: \frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{K}$ Sinn.]

Definition

$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} := a\,b_\parallel = a_\parallel b = a b \cos(\varphi)}$

$\rightsquigarrow$ Gleichberechtigung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ $\rightsquigarrow$ Definiert $\cos(\varphi)$

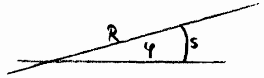
((NB



"Kosinussatz" $c^2 \mathrel{\underset{\vert}{=}} a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

folgt aus Vektorrechnung: $= (\vec{a}-\vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$))

Winkel ?



Maß der "Öffnung" zweier Geraden

offensichtlich ist R proportional zu s.

Definition $\boxed{\text{Winkel } \varphi := \frac{s}{R}}$ ((dimensionslos : Länge/Länge))

rechter Winkel ? 90° ? $\pi/2$!

nachmessen:

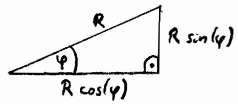
, $s/R = 3.14159\ldots =: \pi$

Raumwinkel ?

Maß für "Öffnung" eines Kegels, mit Stück Kegelfläche S als Abschluß. $2\cdot R \to 4\cdot S$, also:

Def $\boxed{\text{Raumwinkel } \Omega := S/R^2}$ ((dimensionslos))

Sinus ? Kosinus ?

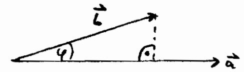


$\cos(\varphi) := \frac{\text{Kantenlänge am Winkel } \varphi}{R}$

$\sin(\varphi) := \frac{\text{Kantenlänge gegenüber } \varphi}{R}$

$\Rightarrow$ Pythagoras: $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$

verstehen jetzt auch das letzte Gleichheitszeichen der Skalarprodukt-Def :



$b_\parallel = b\cos(\varphi)$

Formelsammlung zum Skalarprodukt

"genau dann, wenn"

$\vec{a}^2 := \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$, $|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}^2}$, $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab$

$|\vec{a}+\vec{b}| \leq a + b$

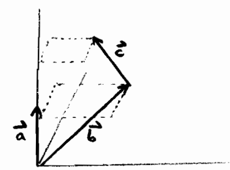
$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq ab$ (Schwarz'sche Ungleichung)

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

(*) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

$r_{12} = r_{21} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \mathrel{\underset{\vert}{=}} \sqrt{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2}$

$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}$



alles anschaulich klar; z.B. Skizze $\rightarrow$

liefert $(\vec{b}+\vec{c})_\parallel = b_\parallel + c_\parallel$. Multipliziere mit a $\overset{\text{es folgt}}{\Rightarrow}$ (*)

Vereinbarung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\vec{b}$

brauche manchmal Klammern: $\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$!

nie durch einen Vektor teilen. "$\cancel{\frac{1}{\vec{a}}}$" nicht def.

in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl, $\overrightarrow{\text{Vektor}} = \overrightarrow{\text{Vektor}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ in Komponenten

brauchen Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen:

$\vec{e}_1 = (1,0,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0)$; $\vec{e}_3 = (0,0,1)$

dann ist $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

und
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)\\ &= a_1b_1\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + a_2b_1\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + a_3b_1\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1\\ &+ a_1b_2\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + a_2b_2\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + a_3b_2\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2\\ &+ a_1b_3\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + a_2b_3\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + a_3b_3\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Einstein'sche Summenkonvention (der Gipfel der Faulheit… … aber sehr effizient!)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j =: a_j b_j$$

falls zwei gleiche Indizes vorkommen → summieren

obige Herleitung nun kurz: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_j\vec{e}_j\cdot b_k\vec{e}_k = a_j b_k \delta_{jk} = a_j b_j$

mit Kronecker-Symbol $\delta_{jk} := \vec{e}_j\cdot\vec{e}_k = \begin{cases}1 & \text{für } j=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

Anwendungs-Beispiele:

$a_j a_j = a^2$

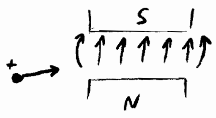
$c_k a_j a_l b_k \delta_{jl} = a^2(\vec{c}\cdot\vec{b})$

$\delta_{jl}\delta_{lk} = \delta_{jk}$, $\delta_{jl}\delta_{lm}\delta_{mn}\delta_{nk} = \delta_{jk}$

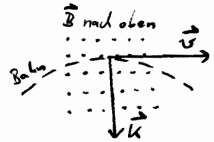
$\delta_{jj} = 3$, $\delta_{jl}\delta_{lj}\delta_{mn}\delta_{nm} = 9$

Kreuzprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$

Motivation



el. geladenes Teilchen (Ladung q)
fliegt durch Magnetfeld $\vec{B}$
Experiment ⇒ $\vec{K}\perp\vec{v}$, $\vec{K}\perp\vec{B}$
und $\vec{K}$ proportional q und $vB_\perp = v_\perp B$ ← Komp. senkrecht zu $\vec{v}$



⇒ erfinde "Kreuzprodukt"
mit den genannten Eigenschaften

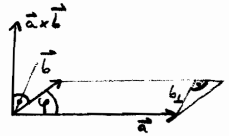
$$\vec{K} =: q\,(\vec{v}\times\vec{B})$$

(Anwendung? DESY, CERN, .. !)

Definition

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} := \begin{pmatrix}\text{Fläche des von}\\ \vec{a},\vec{b}\ \text{aufgespannten}\\ \text{Parallelogramms}\end{pmatrix}\cdot\vec{e} = -\vec{b}\times\vec{a} = \vec{e}\,ab\sin(\varphi)}$$

wobei $\vec{e}$ Einheitsvektor $\perp\vec{a}$ und $\perp\vec{b}$
$\vec{a},\vec{b},\vec{e}$ bilden ein Rechtssystem



Formelsammlung zum Kreuzprodukt

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp\times\vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{a} = 0$, $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab_\perp = a_\perp b$

$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$

$a\perp\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = ab$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

alles anschaulich klar ;

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})}$$ (Beweis s. Ü 6d)

(kommt sehr häufig vor)

Zerlegung $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$ oft nützlich

muß angeben, in Bezug auf welchen Vektor $\parallel$ und $\perp$ gilt:

z.B. in Bezug auf Einheitsvektor $\vec{e}$

$\Rightarrow \vec{a}_\parallel = (\vec{a}\vec{e})\vec{e}$

$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a}(\vec{e}\vec{e}) - \vec{e}(\vec{a}\vec{e}) \overset{\text{BAC-CAB}}{=} \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})$

$\vec{a}\times\vec{b}$ in Komponenten

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$

$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2$; $\vec{e}_1\times\vec{e}_1 = 0$ etc.

$\Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})_1 = a_2b_3 - a_3b_2$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2 , a_3b_1 - a_1b_3 , a_1b_2 - a_2b_1)}$

Indizes: j-te Komponente ergibt sich durch $\cdot\vec{e}_j$ auf beiden Seiten

(wieder für ganz faule, oder effiziente Rechner)

$(\vec{a}\times\vec{b})_j = a_k b_\ell \, \vec{e}_j\cdot(\vec{e}_k\times\vec{e}_\ell) =: \varepsilon_{jk\ell}\, a_k b_\ell$

mit $\varepsilon_{jk\ell} := \vec{e}_j\cdot(\vec{e}_k\times\vec{e}_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{wenn 2 Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{wenn } j,k,\ell \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } j,k,\ell \text{ antizyklisch} \end{cases}$

"total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe"

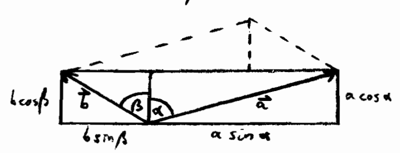
((zyklisch: 1,2,3 ; 2,3,1 ; 3,1,2
anti " : 1,3,2 ; 2,1,3 ; 3,2,1))

Trigonometrie?

Sinussatz, Kosinussatz etc

sind einfache Folgerungen der Vektorrechnung. (s. S.3)

weiteres Bsp.



Fläche großes Rechteck $\overset{\text{Fläche Parallelogramm}}{=} |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin(\alpha+\beta)$

$\cdot\!/\!\cdot$ $= $ linkes + rechtes Rechteck

$= b\sin(\beta)\; a\cos(\alpha) + a\sin(\alpha)\; b\cos(\beta)$

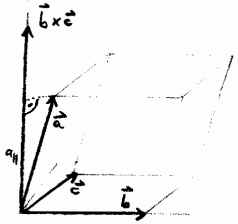
(teile durch $a\cdot b$) $\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

Griechisches Alphabet
(der für uns brauchbare Teil davon)

α		alpha	μ		mu
β		beta	ν		nu
γ	Γ	gamma	ξ	Ξ	xi
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ϵ, ε		epsilon	ρ, ϱ		rho
ζ		zeta	σ	Σ	sigma
η		eta	τ		tau
θ, ϑ	Θ	theta	ϕ, φ	Φ	phi
κ		kappa	χ		chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
			ω	Ω	omega

noch ein doppeltes Produkt (neben $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$):

Spatprodukt



$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_{\parallel}\,|\vec{b}\times\vec{c}|$

$= \begin{pmatrix}\text{Volumen des Parallelepipeds} \\ \text{mit Kanten } a,b,c\end{pmatrix}\cdot\frac{a_{\parallel}}{|a_{\parallel}|}$

$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

in Komponenten $= a_1\cdot b_2c_3 - a_1 b_3 c_2$
$+a_2\cdot b_3c_1 - a_2 b_1 c_3$
$+a_3\cdot b_1c_2 - a_3 b_2 c_1$

$(= \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k)$

ordnet 9 Zahlen eine einzige Zahl zu

$\hat{=}$ "Determinante"

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ "Matrix"; s. Kap. 4

Sarrus' Regel
(nur 3x3 und 2x2)

$\mathbb{1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = (\delta_{jk})$

[→ s.a. Ü8]

Vektorgleichungen [→ s.a. Ü7]

schränken $\vec{r}$'s so ein, daß Lsn geometr. Objekt bilden ...

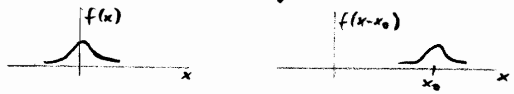
Bsp. $\vec{r}\cdot\vec{e}_3 = 0$. hat (∞ viele) Lsn: $\vec{r} = (x,y,0)$
$\Rightarrow$ ist Gleichung der xy-Ebene

$\vec{r}\cdot\vec{e} = 0$. Ebene durch Ursprung $\perp \vec{e}$

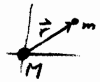
$|\vec{r}| = R$. Kugel mit Radius R

$|\vec{r}-\vec{r}_0| = R$. " , Mitte bei $\vec{r}_0$

↳ Translation: Ursprung-bezogene ($\vec{r}$'s enthaltende)
Physik wird $\vec{r}_0$-bezogen durch $\vec{r}\to\vec{r}-\vec{r}_0$



weiteres Bsp zur Translation: Grav.-Kraft



$\vec{K} = -\frac{\gamma m M}{r^2}\vec{e}_r$

$\Rightarrow$ Stern (M) bei $\vec{r}_0$ hat $\vec{K} = -\frac{\gamma m M}{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

LK (Linearkombination)

c_1 Objekt$_1$ + c_2 Objekt$_2$ + .. ist LK aus O_j

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_3\vec{e}_3$ ist LK aus $\vec{e}$'s

linear in = hoch eins von

$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c}$ ist LK aus $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

VONS (vollst. Orthonormalsystem)

$\boxed{\begin{array}{l} 3 \text{ Vektoren } \vec{f}_j \text{ bilden VONS (Dreibein)} \\ \Leftrightarrow \vec{f}_j\cdot\vec{f}_k = \delta_{jk} \quad \text{und} \quad \vec{f}_1\cdot(\vec{f}_2\times\vec{f}_3) = +1 \end{array}}$

↳ d.h. Rechtssystem.

Kronecker-Symbol

$\delta_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{für } j=k \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

"vollständig", weil jeder Vektor nach $\vec{f}_j$ entwickelbar:

$\vec{a} = a_1'\vec{f}_1 + a_2'\vec{f}_2 + a_3'\vec{f}_3$

$\vec{a}$ bekannt, erhalte $a_1' = \vec{f}_1\cdot\vec{a}$ etc.

$\vec{a},\vec{b}$ "linear unabhängig" $\Leftrightarrow$ aus $c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0}$ folgt $c_1=c_2=0$

3 linear unabh. V. spannen den 3D V.raum auf.

[→ s.a. Ü8]

— Ende Kap. 1 —

haben Sprache ~~gelernt~~ Vokabeln (Vektoren, Operationen)

bisher alles statisch (unbewegt)

$\Rightarrow$ jetzt kommt Schwung in die Physik: Kap. 2

2. Kinematik

Kino, Bilderfolge, bewegte Pfeile

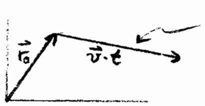
$\vec{a}(t) = \big(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\big)$ = Vektorfunktion

Zeit t, z.B. $\vec{r}(t)$, $\vec{K}(t)$, $\vec{v}(t)$

((Funktionen: Kap. 5. hier nur einfache, x, x^2, $\frac{x}{1+x^2}$, $\cos(x)$, $\sin(x)$))

Raumkurven kennenlernen über Bsp.

(A) Bewegung mit $\vec{v} = \overrightarrow{const_t}$.
$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ bekannt.



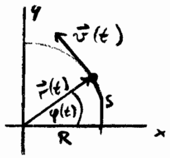
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$
$= (x_0 + v_1 t,\ y_0 + v_2 t,\ \dots)$
$\vec{v} = (\ v_1,\ v_2,\ v_3)$

Parameterdarstellung einer Geraden.
Parameter t läuft von $-\infty$ nach ∞

(B) Kreisbewegung mit $v = const_t$ in xy Ebene
ab $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$

$s(t) = vt$
$\varphi(t) = \frac{s(t)}{R} = \frac{v}{R}t =: \omega t$ "Kreisfrequenz"

$\left(\omega = \frac{v}{R},\ [\omega] = 1/\text{Zeit}\right)$



$\vec{r}(t) = R\,\big(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0\big)$

Umlaufzeit = Periode = T

zu $t = T$ wird $\varphi = 2\pi = \omega T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

((Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$. "Frequenz" = $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ bei uns selten))

$\vec{v}(t)$ rein geometrisch: kenne v, suche $\vec{e}_v$

$\vec{v}(t) = v\vec{e}_v = v\cdot\left(\vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}(t)}{R}\right) = v\,(0,0,1)\times(c,s,0)$
$= R\omega\,\big(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0\big)$

(C) Schraubenlinie $\vec{r}(t) = \big(R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), v_3 t\big)$

(D) Holzschraube $\vec{r}(t) = \big(R(t)\cos(\omega t), R(t)\sin(\omega t), v_3 t\big)$
$\}\ v_3 t_0$
mit $R(t) = R(1 - t/t_0)$
$0 < t < t_0$

(E) Ellipse $\vec{r}(t) = \big(a\cos(\omega t), b\sin(\omega t), 0\big)$

(F) ∞, $\omega t =: \tau$ $\vec{r} = \big(2R\cos(\tau), R\sin(\underline{\underline{2}}\tau), 0\big)$

(G) spielen; e.g. $\mathcal{S}$

Winkelgeschwindigkeit

Kreis (s. (B) oben) $\vec{v}_{kreis} = R\omega\,(\vec{e}_3 \times \vec{e}_r) = \underbrace{(\omega\vec{e}_3)}_{=:\,\vec{\omega}} \times \vec{r}$

$\varphi = \omega t$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

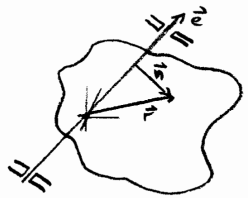
(cave $\vec{\omega} \neq \omega$ ...)

allgemein (es muß nur eine momentane Achse $\vec{e}$ geben)

$\vec{\omega}(t) = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}(t)$

((Erde, ⌀, $\omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$, wohin zeigt $\vec{\omega}$?))

starrer Körper (z.B. gelagert), Ursprung auf Achse, $\vec{v} = ?$ eines Punktes bei $\vec{r}$:



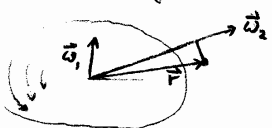
$\vec{v} = v\cdot\left(\vec{e}\times\frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp}\right) = \underbrace{\frac{v}{r_\perp}}_{\omega}\,\underbrace{(\vec{e}\times\vec{r}_\perp)}_{\Rightarrow\,\vec{r}}$

$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$

Ist $\vec{\omega}$ Vektor? (→ Kap. 1: endl. Drehungen nicht!)

$\lambda\cdot\vec{\omega}$: kein Problem

$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \stackrel{?}{=} \vec{\omega}_{ges.}$ (bei Achsen-Kreuzung im Ursprung) $\exists A$:



"Karussell"

ohne Motor : $\vec{u} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}$
ohne Kar. : $\vec{v} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$

$\vec{u} + \vec{v} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\times\vec{r}$
$\vec{w} = \vec{\omega}_{ges.}\times\vec{r}$ $\forall\vec{r}$ "für alle"

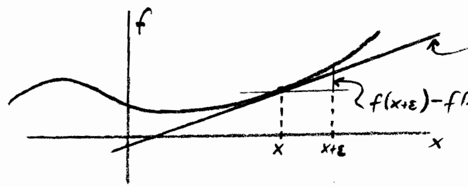
Ein (irgendwie durch den Raum eiernder) starrer Körper hat stets ein $\vec{\omega}$, denn 3 Punkte legen seine Position fest, und es ist

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\times(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} \qquad \text{wegen bac-cab.}$$

$$\Big(\!\Big(\overrightarrow{\text{Zähler}} = (\vec{v}_1-\vec{v}_3)\times\big(\vec{\omega}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\big) = \vec{\omega}\cdot\underbrace{\big((\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\big)}_{=\text{ Nenner}} - (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\underbrace{\big((\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot\vec{\omega}\big)}_{=0} \Big)\!\Big)$$

<u>Differenzieren</u> (Ableitung bilden)

einfach. Sie können es schon: malen. Tangente, Anstieg.



$y = ax + b$

$a \;\hat{=}\; \text{Anstieg} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Def. $\boxed{\text{Ableitung von } f(x) \text{ bei } x = f'(x) := \text{Anstieg der Kurve bei } x}$

per Rechnung:
$$\boxed{f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \quad \text{"Differentialquotient"} \qquad f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f(x)}$$

"Limes" $\hat{=}$ Grenzwert

verstehen? Wie immer mit <u>Bsp</u> (bitte $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ hinzudenken)

(A) $\partial_x x^3 = \frac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\big(\cancel{x^3} + 3x^2\varepsilon + \underbrace{3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^2)} - \cancel{x^3}\big) = 3x^2$

nützliche Notation: $\mathcal{O}(\eta) :=$ etwas $\sim \eta$ bei $\eta\to 0$ gegen Null gehendes

(B) $\partial_x \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \frac{\cancel{x}+\varepsilon - \cancel{x}}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(C) $\partial_x \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x+\varepsilon} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{x-(x+\varepsilon)}{(x+\varepsilon)x} = -\frac{1}{x^2}$

(D) $\partial_x x^{n/m} = \frac{1}{\varepsilon}\big(\underbrace{(x+\varepsilon)^{n/m}}_{=:\, x^{n/m} + a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} - x^{n/m}\big)$, $(x+\varepsilon)^n = \left(x^{n/m} + a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)^m$,

$x^n + nx^{n-1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = x^n + m x^{\frac{n}{m}(m-1)} a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$\Rightarrow a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

$= a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

bisher: $n, m = 1, 2, 3, \ldots$; genauso für $n = -1, -2, \ldots$

kann jede reelle Zahl λ bel. genau durch $\frac{n}{m}$ approximieren

$\Rightarrow$ allgemein $\partial_x x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}$

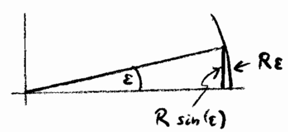
(E) $\partial_x \sin(x) = \frac{1}{\varepsilon}\big(\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)\big)$

s. Kap. 1 Skript 5.7

$= \frac{1}{\varepsilon}\big(\sin(x)\underbrace{\cos(\varepsilon)}_{\overset{(**)}{=} 1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \cos(x)\underbrace{\sin(\varepsilon)}_{\overset{(*)}{=} \varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^3)} - \sin(x)\big)$

$= \cos(x)$

(*)



(**) $\cos(\varepsilon) = \sqrt{1-\sin^2(\varepsilon)}$

$\rightarrow \sqrt{1-\varepsilon^2+\ldots} = 1 - c\varepsilon^2 + \ldots$

quadr.: $1 - \varepsilon^2 + \ldots = 1 - 2c\varepsilon^2 + \ldots$

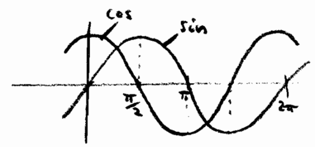
$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

(F) $\partial_x \cos(x) = \partial_x \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\partial_x \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin(x)$

(***) $\sin(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$\cos(x) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$



(G) $\partial_x\, g\cdot h = g'h + h'g$ "Produktregel"

(H) $\partial_x f(g(x)) = f'(g)\cdot g'$ "Kettenregel"

(I) $\partial_x f(g,h) = f'^g g' + f'^h h'$

aus (I) folgen (H) und (G). (I)-Herleitung genügt:

$\partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}\big[f(\underbrace{g(x+\varepsilon)}_{= g(x)+\varepsilon g'(x)}, h(x+\varepsilon)) - f(g(x), h(x))\big]$

$= \frac{1}{\varepsilon}\big[f(g+\varepsilon g', h+\varepsilon h') - f(g, h+\varepsilon h') + f(g, h+\varepsilon h') - f(g,h)\big]$

$= \frac{1}{\varepsilon}\big[\varepsilon g'\cdot f'^g(g, h+\varepsilon h') + \varepsilon h' f'^h(g,h)\big] = (\mathrm{I})$

Bsp (I) gilt natürlich entsprechend auch für 3 Funktionen.

schöne Anwendung: "Gradient"

Maikäfer fliegt mit $\vec{r}(t)$ durch Abendluft mit Temp. $T(\vec{r})$

Welche Temp.-Änderung pro Zeit hat er auszuhalten?

$$\partial_t T\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \dot{x}\,\partial_x T + \dot{y}\,\partial_y T + \dot{z}\,\partial_z T \qquad (\partial_t z =: \dot{z})$$

sieht aus wie Skalarprod.

$$= \dot{\vec{r}} \cdot (\partial_x T, \partial_y T, \partial_z T)$$

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z)\, T =: \text{grad}\, T =: \vec{\nabla} T$$

$$= \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} T \quad , \quad \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

differenzieren einer Vektorfunktion?

simpel: $\partial_t \vec{a}(t) := \frac{d\vec{a}}{dt} = (\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3)$

((wie bei $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$))

übrigens ist $\overrightarrow{\text{Beschleunigung}} := \partial_t \vec{v}(t) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$

Gefahr: $|\dot{\vec{r}}| = v \neq \dot{r} = \partial_t |\vec{r}|$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2\sqrt{\ldots}}(2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}) = \frac{1}{\sqrt{\ldots}}\,\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{v} = \vec{e}_r\cdot\vec{v} = v_{\parallel} \neq v$$

((z.B. Kreisbewegung von S.11: $|\vec{r}| = R_w$, $\dot{r} = 0$))

Rechenregeln (mit (I) leicht zu verstehen)

$$\partial_t \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} \\ \lambda\vec{a} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\times\vec{b} \end{cases} = \begin{cases} \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}} \\ \dot{\lambda}\vec{a} + \lambda\dot{\vec{a}} \\ \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}} \\ \dot{\vec{a}}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dot{\vec{b}} \end{cases}$$

Linearer Operator

Op Element = anderes Element ; $(\lambda) \nearrow = \nearrow$; $(\vec{a}\times)$ ... ; $(\partial_x) f = f'(x)$

A ist ein linearer Op. $\Leftrightarrow$ $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A f + \beta A g$

$Af := \frac{1}{f}$ ist nicht lin., denn $\frac{1}{\alpha f + \beta g} \neq \alpha\frac{1}{f} + \beta\frac{1}{g}$

$A^2 := AA$, $\partial_x^3 f = f'''$, etc.

3. Newton

1643 – 1727

bisher: Kap 1, Vektoren, Vokabeln gelernt, statisches Weltbild ("Photo")

Kap 2, Kinematik, $\vec{r}(t)$ auf vorgegebenen Kurven, "Kino"

in der Natur: $\vec{r}(t)$ weiß von alleine, wie er sich zu verändern hat!

→ Zukunft vorhersagen? Wahrsagen? Physik!

Physik: Stück Natur verstehen = kann ausrechnen, was sie tun wird.

↳ wir sind gut vorbereitet: $\vec{r}(t)$, ∂_t, ...

Experiment(e) → Prinzipien der Natur-Mathematik ↓ Vorhersage über Experimente } Theor. Physik

in diesem Kap.: Newton'sche Mechanik eines Massenpunktes

Es gilt Teilchen . T. wechselwirken

(stark ,	em ,	schwach ,	Gravi
10^{-15}m ,	$\sim r^{-2}$,	10^{-18}m ,	$\sim r^{-2}$
1 ,	$1/137$,	10^{-5} ,	10^{-40}
klumpend ,	wichtig ,	kurzreichweitig ,	aber Erde aus 10^{50} T.)

Die Wechselwirkung zw. 2 T. hängt von Eigenschaftspaaren (m, q, color, ...) ab

Schlechte Apparate sehen T.-Klumpen als "Massenpkte"

Ww. zw. Massenpkten = Σ (elementare Ww.)

(())

Für die Mechanik besteht die Welt aus Massenpunkten (4),

welche man numerieren kann (4),

und sie behandelt deren Bewegung zu gegebenen Kräften

(ist darum nur "halbe" Theorie).

<u>Das</u> oberste Prinzip ("first principle") der Mechanik ist die Bewegungsgleichung

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{K}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)}$$

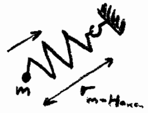
"Antwort" "Ursache"

z.B. $= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

oder $= \sum_i (-\gamma m M_j) \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}$

oder $= -\vec{v} f(v)$ (Reibung)

oder $= \vec{e}_{\text{von m nach Haken}} \cdot \underbrace{\kappa}_{\text{Feder-Daten}} (r_{m-H} - \ell)$



Die Bew.-gl. ist <u>ein</u> Axiom

braucht "actio = reactio" nicht

erklärt "Inertialsystem" (= in denen sie gilt)

definiert $m, \vec{K}, \vec{E}, \vec{B}, q$

<u>und</u> ermöglicht $\vec{r}(t)$ - Bestimmung!

(braucht keine anderen Überlegungen, keine Fliehkräfte, ..)

<u>Vorhersage</u>

$\vec{r}(0)$ und $\vec{v}(0)$ bekannt $\Rightarrow$ $\vec{r}(t)$ wegen

Bew.gl. - Zerlegung in $\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = \frac{1}{m}\vec{K} \end{cases}$ und

$\vec{r}(t+dt) = \vec{r}(t) + dt\, \vec{v}(t)$
$\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + dt\, \frac{1}{m} \vec{K}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$

(3D: 6 Anfangsdaten ; 2D: 4 ; 1D: 2)

Lösung z.B. per Computer (numerisch; genähert),

am besten aber per Rechnung.

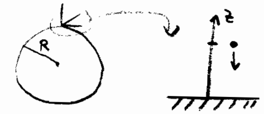
(("System gekoppelter Differentialgln. zweiter Ordnung"

gee... können froh sein über jeden lösbaren Spezialfall!))

<u>Freier Fall</u>

$\vec{K}_{auf\, m} = -\frac{\gamma m M}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\times|}$

$\vec{r}_0 = (0,0,-R)$; $\vec{r}-\vec{r}_0 \approx -\vec{r}_0$, $\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\times|} \approx \vec{e}_3$



$\vec{K} = -m \frac{\gamma M}{R^2} \vec{e}_3 =: -mg\vec{e}_3$

$\boxed{\ddot{z} = -g, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad z(0) = h}$ (1D, 2 Anfangsdaten ✓)

ER $\Rightarrow$ Ansatz erlaubt. Lsg ~

"Entdeckungsfreiheitsrahmen"; s. Ü14,15

$z(t) = A + Bt + Ct^2 + D\cos(\omega t)$

- Ansatz (darf unzureichend sein; mehr dazu: s. Ü-Blatt 5)
- bilde $\dot{z}, \ddot{z}$, erfülle Bew.Gl. identisch in t (hier: 5 Ansm)
- setze in Anf.bed. ein, notiere Resultat

$\dot{z} = B + 2Ct - D\omega \sin(\omega t)$

$\ddot{z} = 2C - D\omega^2 \cos(\omega t) \overset{!}{=} -g \quad \Rightarrow \quad D = 0, \quad C = -\frac{g}{2}$

$\dot{z}(0) = B \overset{!}{=} 0$

$z(0) = A = h$, also $\underline{z = h - \frac{g}{2}t^2}$

es gilt nur eine Lsg, also ist sie es. (nur <u>eine</u>? s. Kap. 7, nächstes Sem.)

(hätten wir C-Term vergessen, wäre Bew.Gl. nicht $\forall\, t$ erfüllbar gewesen)

"Aufleiten" ($\dot{z} = -gt + B$, $\quad \dot{z}(0) = B \overset{!}{=} 0$
$z = -\frac{g}{2}t^2 + Bt + A$, $\quad z(0) = A \overset{!}{=} h$)

geht nicht immer; z.B. 3-Körper-Problem,

<u>1D harmonischer Oszillator</u>

$K_1 = -\kappa x$

$\boxed{\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m} x, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(0) = 0}$ (($+B\cos(\omega_2 t)$, braucht nicht wg. $x(0) \overset{!}{=} 0$))

Ansatz : $x = A\sin(\omega t)$ ↙. bilde $\dot{x}, \ddot{x}$, erfülle $\dot{x}(0)$, $x(0)$

$\Rightarrow \underline{x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\, t\right)}$

1D harmonischer Oszillator

$K_1 = -\kappa x$

EB: $\boxed{\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m} x \,,\ \dot{x}(0) = v_0 \,,\ x(0) = 0}$, $x(t) = ?$

Ansatz: $x(t) = A \sin(\omega t)$ (($+ B\cos(\omega_2 t)$ brauchen wir nicht, wg. $x(0) \overset{!}{=} 0$))

$\Rightarrow \dot{x} = A\omega \cos(\omega t)$, $\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t)$

Bewgl erfüllen: $-A\omega^2 \sin(\omega t) \overset{!}{=} -\frac{\kappa}{m} A \sin(\omega t) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$

AB erfüllen: $\dot{x}(0) = A\omega \overset{!}{=} v_0 \Rightarrow A = v_0 \sqrt{\frac{m}{\kappa}}$

$x(0) \overset{!}{=} 0$ ✓ macht Ansatz automatisch

$\Rightarrow \underline{x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\, t\right)}$

behandle nun (möglichst) allg. Folgerungen aus $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

- $\vec{p}$ und $\vec{L}$

"Wucht" = Impuls = $\vec{p} := m\vec{v}$

bisher hatten wir konstante Masse $m = \text{const}_t$ angenommen.

allgemeiner lautet die Newton'sche Bewgl: $\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{K}}$

((check: wenn $m = \text{const}_t$, dann $\vec{K} = \dot{\vec{p}} = \partial_t (m\dot{\vec{r}}) = m\ddot{\vec{r}}$))

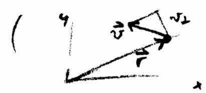
↳ [sonst: s. Ü16]

Impulserhaltung: $\dot{\vec{p}} = 0 \Leftrightarrow \vec{K} = \vec{0}$ (langweilig!)

mehrere Teilchen, Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{a=1}^{N} \vec{p}_a$

$\dot{\vec{P}} = \sum_a \dot{\vec{p}}_a = \sum_a m_a \ddot{\vec{r}}_a = \sum_a \vec{K}_{auf\ a}$

"Drehwucht" = Drehimpuls $= \vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}_\perp$

[( $\vec{L} = \vec{e}_3\, r m v_\perp = m\vec{r} \times \vec{v}_\perp = m\vec{r} \times \vec{v}$.

ein Teilchen hat $\vec{L}$ auch ohne Stange)] $\vec{L}$ ist vom Ursprung abh.!

$\partial_t \vec{L} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}}$ "Drehmoment"

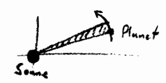
$= 0 + \vec{r} \times \vec{K}$ (allg., egal wo Ursprung ist)

wenn $\vec{K} \sim \vec{r}$ (oder $\vec{r} = 0$, oder $\vec{K} = 0$) ("Zentralkraft": $\vec{K} = K(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r}$), dann

$\dot{\vec{L}} = 0$, d.h. $\vec{L} = \overrightarrow{\text{const}_t}$

"Drehimpulserhaltung" für 1 T. ((s. auch Ü5))

Flächensatz (Kepler 1571-1630, Newton 1643-1727)



Planet (m) um Sonne (= Ursprung)

$\vec{L}$ behält Richtung (m bleibt in Ebene $\perp \vec{L}$) und Betrag

$\text{const}_t = \frac{1}{2m} |\vec{L}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} r v_\perp = \frac{r \cdot dr_\perp}{2\, dt} = \frac{d\,\text{Fläche}}{dt}$

T und V

Wollen "Energie" einer Physik ergründen — multipliziere daran Bew.gl. mit der einmal weniger abgeleiteten Unbekannten.

Hier: $\vec{v} \cdot [\, m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} \,]$

$m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \vec{K}$

$\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right)^{\cdot} = \frac{d\vec{r} \cdot \vec{K}}{dt} = \frac{dA}{dt}$ mit dA = am T. in dt verrichtete Arbeit

Energiezufuhr erhöht also die Größe

$\frac{m}{2}\vec{v}^2 =: T$ = kinetische Energie

Kann man auch $\vec{v} \cdot \vec{K} = (\text{etwas})^{\cdot}$ schreiben?

wenn es zu gegebenem $\vec{K}(\vec{r})$ eine Hilfsfunktion $V(\vec{r})$ "Potential" ("pot. E.")

derart gibt, daß $\vec{K}(\vec{r}) = -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$ ($= -\vec{\nabla} V$)

gilt, dann ist $\vec{v} \cdot \vec{K} = -\vec{v} \cdot (\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) = -\partial_t V(\vec{r}(t))$

und folglich $\partial_t (T + V) = 0$

und somit $\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t)) = \text{const}_t = E$ ("Energieerhaltungssatz" der Mechanik eines Mp)

Gebrauch der Erhaltungssätze:

$\vec{p}_{\text{vor Stoß}} = \vec{p}_{\text{nach Stoß}}$

$\vec{L}_{\text{start}} = \vec{L}_{\text{später}}$

$(T+V)_{\text{start}} = (T+V)_{\text{später}}$

V's A) $\vec{K} = (0,0,-mg) \overset{?!}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$

V unabh. von x,y; $V'(z) = mg$, $V(z) = mgz + C$ egal

wähle $C=0$ $\Rightarrow V(z) = mgz$

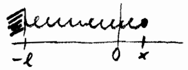
((allg.: $[V]$ = Kraft · Länge = Energie

mühsame Positionsänderung erhöht V

manchmal ist E-Satz schneller als Bew.gl.-Lösen))

B) "ideale Feder" :≡ { hat keine Masse, keine Eigenschwing., erfüllt ... perfekt, hat Daten κ, ℓ }

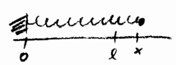
(Kraft = κ · Auslenkung)



$K_1 = -\kappa x \overset{?!}{=} -\partial_x V(x)$

$\Rightarrow V(x) = \frac{\kappa}{2} x^2 + \cancel{C}$ 0

Translation um $+\ell$, $x \to x - \ell$

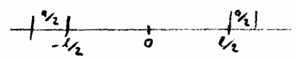


$K_1 = -\kappa(x-\ell)$

$V(x) = \frac{\kappa}{2}(x-\ell)^2$

[V ist über Feder verteilt: Hälfte hat 2κ

($\kappa a = K = \kappa_{\text{Hälfte}} \cdot \frac{a}{2}$,



)

und es ist tatsächlich $V = \frac{\kappa}{2} a^2 \overset{?!}{=} 2 \, \frac{(2\kappa)}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2$

... weiter halbieren, bis zu atomaren Ausdehnungen.]

Folglich hat $\vec{K} = \vec{e}_{m \to \text{Bef.}} \kappa (r_{mB} - \ell)$ $\cancel{}$ typ.

das Potential $V = \frac{\kappa}{2}(r_{mBef.} - \ell)^2$

(check: per $-(\partial_x V, \dots, \dots)$ zu $\vec{K}$ gelangen!)

C) $\vec{K} = -\gamma m M \frac{\vec{r}}{r^3} \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$

Ansatz: $V(\vec{r}) = f(r)$

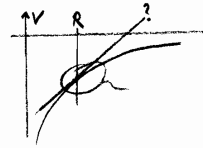
$-\partial_x V = -f'(r) \cdot \partial_x \sqrt{x^2+y^2+z^2} = -f'(r) \frac{x}{r} \overset{!}{=} -\gamma m M \frac{x}{r^3}$

$\Rightarrow f'(r) = \frac{\gamma m M}{r^2}$, $f = \frac{c}{r}$, $f' = -\frac{c}{r^2}$, $c = -\gamma m M$, $f = -\frac{\gamma m M}{r}$ ...

$\Rightarrow \underline{V(\vec{r}) = -\frac{\gamma m M}{r}}$ "Gravitations-Potential"

(($z \ll R$, $V = -\frac{\gamma m M}{R+z} = -\frac{\gamma m M (R-z)}{R^2 - z^2} \approx \text{const}_z + m \frac{\gamma M}{R^2} z + O(z^2)$

$\frac{\gamma M}{R^2} = g$



oder: durch Reihenentwicklung

$\frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} + Az + O(z^2)$

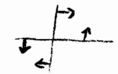
$1 = (R+z)\left(\frac{1}{R} + Az + \dots\right)$

$= 1 + RAz + \frac{z}{R} + O(z^2)$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{R^2}$))

D) komponentenweises Aufleiten [s.a. Ü18]

D1) 2D, $\vec{K}(\vec{r}) = (\alpha y, \alpha x) \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V)$



$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha y \Rightarrow V = -\alpha x y + f(y)$

$\partial_y V = -\alpha x + f'(y) \overset{!}{=} -\alpha x \Rightarrow f = \text{const}_{x,y}$

$\Rightarrow \underline{V = -\alpha x y}$

D2) $\vec{K} = \alpha(x-y, x-y)$

$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$, $V = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \alpha x y + f(y)$

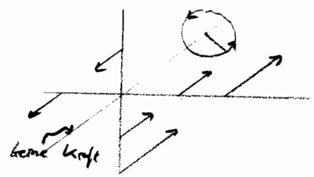
$\partial_y V = \alpha x + f'(y) \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$ nicht erfüllbar!

$\vec{K}$ hat kein V.

E-Satz gilt nicht:

Pendel-E nimmt zu

(es gibt solche $\vec{K}$'s)



Vermutung: $\vec{K}$ hat V $\Leftrightarrow$ sich auf der $\vec{K}$-"Strömung" nichts dreht

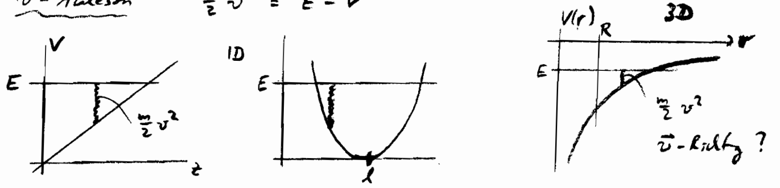
(SS: $\text{rot}\,\vec{K} = \vec{0} = \nabla \times \vec{K}$)

V's addieren sich, weil sich $\vec{K}$'s addieren:

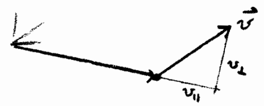
$$\vec{K} = -(\partial_x V, \dots, \dots)$$
$$\vec{F} = -(\partial_x W, \dots, \dots)$$
$$\vec{K} + \vec{F} = -(\partial_x (V+W), \dots, \dots)$$

Gesamtpotential eines T.-Systems = Σ seiner V's.

v^2-Ablesen $\quad \frac{m}{2} v^2 = E - V$

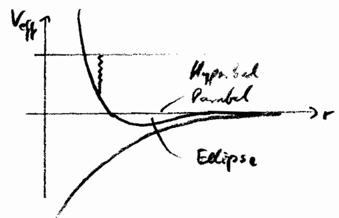


effektives Potential



$$v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$$
$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}_\perp$$
$$L = |\vec{L}| = m r v_\perp$$
$$\dot{r} = \partial_t \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \vec{e}_r \vec{v} = v_\parallel \qquad \text{(vgl. Skript S.15, Ende Kap. 2)}$$
$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) + V(r)$$
$$\boxed{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \text{mit } V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)} \qquad \text{((3D Bewgl. → 1D reduziert!))}$$

Bsp zu $V(r) = -\frac{\gamma m M}{r}$



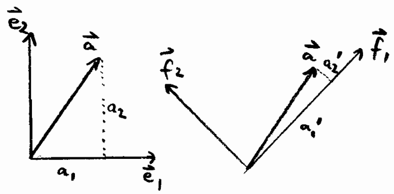
Newton regiert die Welt: Kräfte bekannt, weiter per $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$
Zukunft liegt fest. (Laplace'scher Dämon)

4. Tensoren

Fremdwort?
zur Beruhigung: Vektor = Tensor 1. Stufe $(\cdot,\cdot,\cdot)$; 2. Stufe $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, ...

Vektoren sind "Pfeile".
aber was ist ein "Pfeil"?
→ etwas, was in gedrehtem System andere Schatten bekommt.

4.1 Drehmatrix



Koord.-System-Drehung.
Pfeil bleibt stehen.
Komponenten ändern sich.

$$\text{„}\vec{a}'\text{"} := (a_1', a_2', a_3)$$

(hier: Vektoren vertikal aufschreiben von Vorteil)

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1' = \vec{f}_1 \vec{a}, \\ a_2' = \vec{f}_2 \vec{a}, \\ a_3' = \vec{f}_3 \vec{a}, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1\vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_1\vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_1\vec{e}_3 a_3 \\ \vec{f}_2\vec{e}_1 a_1 + \dots \\ \underbrace{\vec{f}_3\vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_3\vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_3\vec{e}_3 a_3}_{(\vec{f}_3\vec{e}_1, \vec{f}_3\vec{e}_2, \vec{f}_3\vec{e}_3)\cdot\vec{a}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f}_1\vec{e}_1 & \vec{f}_1\vec{e}_2 & \vec{f}_1\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2\vec{e}_1 & \dots & \dots \\ \vec{f}_3\vec{e}_1 & \vec{f}_3\vec{e}_2 & \vec{f}_3\vec{e}_3 \end{pmatrix}}_{=D} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

= Matrix D angewandt auf $\vec{a}$
d.h. D-Zeile $\cdot \vec{a}$, nach "Zeile mal Spalte"-Regel:

allg. $\begin{pmatrix} \text{———} \\ \sim\sim\sim \\ \text{- - - -} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{—}\cdot\vdots \\ \sim\cdot\vdots \\ \text{-}\cdot\vdots \end{pmatrix}$

Operator · Element = neues Element

kürzer: $\vec{a}' = D\vec{a}$, $\quad D = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -\vec{f}_2- \\ -\vec{f}_3- \end{pmatrix}$

D-Zeilen: $\vec{f}$'s im alten System
D-Spalten: $\vec{e}$'s im neuen

kürzer: $a_j' = D_{jk} a_k$ (Zeile, Spalte), $\quad D_{jk} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_k$

es ist $(D\lambda\vec a)_j = D_{jk}\lambda a_k = (\lambda D_{jk})a_k = \lambda(D\vec a)_j$

allg.: $\lambda\cdot\text{Matrix} := \begin{pmatrix}\lambda\cdot & \lambda\cdot & \lambda\cdot\\ \lambda\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ \lambda\cdot & \lambda\cdot & \lambda\cdot\end{pmatrix}$

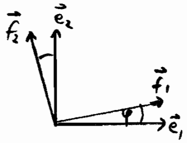
es ist $(D(\vec a+\vec b))_j = D_{jk}(a_k+b_k) = D\vec a + D\vec b$

$\Rightarrow$ Matrix-Anwendung ist lineare Operation.

3 elementare D's

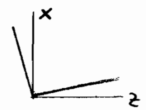
$c := \cos(\varphi)$ $\qquad s := \sin(\varphi)$

Drehung um Winkel φ um z-Achse



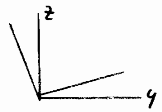
$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0\\ -s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

" um y-Achse



$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s\\ 0 & 1 & 0\\ s & 0 & c\end{pmatrix}$

" um x-Achse



$D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & c & s\\ 0 & -s & c\end{pmatrix}$

2 Drehungen nacheinander

$\vec g\text{'s} \xleftarrow{(2)} \vec f\text{'s} \xleftarrow{(1)} \vec e\text{'s}$

$\vec a'' \qquad \vec a' \qquad \vec a$

$\vec a'' = D^{(2)}\vec a'$, $\vec a' = D^{(1)}\vec a$

$= D^{(2)}(D^{(1)}\vec a) = \text{„}D^{(2)}D^{(1)}\text{"}\vec a$?

$a''_j = D^{(2)}_{jl}(\dots)_l = \underbrace{D^{(2)}_{jl}D^{(1)}_{lk}}_{D^{\text{ges.}}_{jk}} a_k$

$D^{\text{ges.}}_{jk} = \begin{pmatrix}j\text{-te Zeile}\\ \text{von } D^{(2)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k\text{-te Spalte}\\ \text{von } D^{(1)}\end{pmatrix}$

allg. $\begin{pmatrix} \text{———} \\ \sim\sim\sim \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & \wr & \vdots \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\cdot| & -\cdot\wr & -\cdot\vdots \\ \sim\cdot| & \sim\cdot\wr & \sim\cdot\vdots \\ \cdots| & \cdots\wr & \cdots\vdots \end{pmatrix}$

$(AB)_{jk} = A_{jl}B_{lk}$

Reihenfolge wichtig: $AB \neq BA$!

Spur

$Sp(A) := A_{11}+A_{22}+A_{33} = A_{jj}$

$Sp(AB) = Sp(BA)$

denn: $(AB)_{jj} = A_{jk}B_{kj} = B_{kj}A_{jk} = (BA)_{kk}$

also: $Sp(ABC) = Sp(CAB)$ "zyklische Invarianz der Spur"

Umgang mit Matrizen

1. $(A\vec a)_j = A_{jk}a_k$
2. $(AB)_{jk} = A_{jl}B_{lk}$
3. $(\lambda A)_{jk} = \lambda A_{jk}$
4. $(A+B)_{jk} = A_{jk}+B_{jk}$
5. $Sp(A) = A_{jj} \Rightarrow Sp(AB\dots C) = Sp(B\dots CA)$
6. $\det(A) = \varepsilon_{jkl}A_{1j}A_{2k}A_{3l}$

   $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Zitat)
7. $(A^T)_{jk} := A_{kj}$, $A^T = A \Leftrightarrow A$ ist "symmetrisch"

   $A^T = -A \Leftrightarrow A$ ist "antisymmetrisch"

   $\Rightarrow \vec b\cdot(A\vec a) = (A\vec a)\cdot\vec b \overset{!}{=} \vec a A^T\vec b$

   denn: $A_{jk}a_kb_j = a_k(A^T)_{kj}b_j$

   Anwendung: $\vec a'^2 = (D\vec a)\cdot D\vec a = \vec a\underbrace{D^TD}_{=1}\vec a = \vec a^2$, s. unten

   $\vec a'\cdot\vec b' = \vec a D^TD\vec b = \vec a\vec b$ "Invarianz des Skalarprod. unter Drehung"
8. $A^{-1} :=$ die $A^{-1}A = \mathbb{1}$ erfüllende Matrix
9. Dyadisches Produkt $(\vec a\circ\vec b)_{jk} := a_jb_k$

   $\Rightarrow [(\vec a\circ\vec b)\vec c]_j = (\vec a\circ\vec b)_{jk}c_k = a_jb_kc_k = [\vec a\cdot(\vec b\vec c)]_j$

   kurz: $(\vec a\circ\vec b)\vec c = \vec a(\vec b\vec c)$
10. $(\vec a\times\dots) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}$

    denn: $(\vec a\times\dots)\vec b = (\;"\;)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} = \vec a\times\vec b$ ✓

Drehachse und -winkel

$$DD^T = \begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -\vec f_2- \\ -\vec f_3- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec f_1 & \vec f_2 & \vec f_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$D^TD = \begin{pmatrix} -\vec e_1'- \\ -\ 2\ - \\ -\ 3\ - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec e_1' & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ Orthonormierung : $DD^T = D^TD = \mathbb{1}$

Rechtssystem erhaltung : $\det(D) = 1$ (denn: $\det(D) = \vec f_1 \cdot (\vec f_2 \times \vec f_3)$, s. Spatprodukt Kap. 1; Skript S. 9)

Winkeltreue : $D(\vec a \times \vec b) = (D\vec a) \times (D\vec b)$

$D \to$ Achse $\vec e$: $D\vec b = \vec b$, $\vec e = \vec b / b$

$D \to$ Winkel φ : $Sp(D) = 1 + 2\cos(\varphi)$

$\vec e \cdot ((D\vec f) \times \vec f) = \sin(\varphi)$ mit $\vec f$ Einheitsvektor $\perp \vec e$

$\vec e, \varphi \to D$: $D = \underset{\uparrow \cos(\varphi)}{c}\,\mathbb{1} + (1-c)\,\vec e \circ \vec e - \underset{\uparrow \sin(\varphi)}{s}\,(\vec e \times \ldots)$ (*)

Strategie : (*) verifizieren $\to$ Rest folgt.

(*) ist vektoriell formuliert, also genügt Nachweis eines Spezialfalles.

zu z.B. $\vec e = (0,0,1)$

ist $\vec e \circ \vec e = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ und $(\vec e \times \ldots) = \begin{pmatrix} 0&-1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

und somit $(*)_{rhs} = \begin{pmatrix} c&0&0 \\ 0&c&0 \\ 0&0&c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&s&0 \\ -s&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c&s&0 \\ -s&c&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = D_{z,\varphi}$ qed.

q.e.d.
quod erat demonstrandum
was zu zeigen war

$\vec e = (u,v,w)$ liefert die allgemeine Drehmatrix:

$$D_{allg} = \begin{pmatrix} c+(1-c)u^2 & (1-c)uv+sw & (1-c)uw-sv \\ (1-c)vu-sw & c+(1-c)v^2 & (1-c)vw+su \\ (1-c)wu+sv & (1-c)vw-su & c+(1-c)w^2 \end{pmatrix}$$

aus D_{allg} folgen nun die restlichen Eigenschaften S. 27 oben:

z.B. $Sp(D) = 3c + (1-c)\underbrace{(u^2+v^2+w^2)}_{=1} = 1 + 2c$ (immer!)

$D \to$ Achse : Eigenwertproblem

$(D-\mathbb{1})\vec b = \vec 0$ ist homogenes Gl. system

legt $|\vec b|$ nicht fest, also ist (zu $\vec b = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$))

eine der 3 Gln $(D-\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abhängig (folgt aus den beiden andern)

$(D-\mathbb{1})\vec b = \vec 0$ ist Spezialfall des Eigenwertproblems,

d.h. der Frage, welche Elemente sich bei Op-Anw. reproduzieren:

(lin. Op.)(Element) = Faktor (gleiches Element)

$H \quad \vec\psi \quad = \quad E \quad \vec\psi$

$\uparrow$ gegeben

gesucht: Eigenvektor (EV) $\vec\psi$
Eigenwert (EW) E

((z.B. hat $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2$ die EV $\sim$ trig(kx) mit EW $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$))
(((Begr. der QM: $i\hbar\dot\psi = H\psi$)))

hier: eine Drehmatrix hat stets den EW $+1$
und die Drehachse als zugehörigen EV.

eine Vektor-Def$_n$

vgl. Kap. 1; Skript S. 2

Tripel a_j sind **Vektoren**, wenn unter Koord.-System-Drehung (D) die Änderung der Elemente in $a_j' = D_{jk}a_k$ (sowie Addition und λ-Multiplikation) physikalisch sinnvoll ist

((also: Vektoren oder "Pfeile" sind Koordinaten-Dreh-anfällige Schattenspender gemäß $\vec a' = D\vec a$))

Einschub

Matrix A. Komp. A_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

sy $A = A^T$, antisy $A = -A^T$

$\vec{e} \circ \vec{e} = ?$

Bsp $\vec{e}_3 = (0,0,1)$; $(\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3)_{ij} = (\vec{e}_3)_i (\vec{e}_3)_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}$

$(\vec{e}_3)_j = \delta_{3j}$ ((Kronecker-Delta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$))

$(\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3)_{ij} = \delta_{3i}\,\delta_{3j}$

$\vec{a} \times .. = ?$ $\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ & 0 & -a_1 \\ \text{asy} & & 0 \end{pmatrix}$

Dreh $DD^T = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -\vec{f}_2- \\ -\vec{f}_3- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D^T D$

Preisfrage: $D^T = ?$ $\varphi \to -\varphi$!

Test w/ D_x, D_y, D_z

$c(-\varphi) = c(\varphi)$, $s(-\varphi) = -s(\varphi)$

Diag: $1, c$ ✓ Off-Diag: s ✓

$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (D\vec{a}) \cdot (D\vec{b}) = D_{jk} a_k \, D_{jl} b_l = a_k \underbrace{D^T_{kj} D_{jl}}_{= \delta_{kl}} b_l = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Also $\vec{e}$ (3-1 = 2 Zahlen), Winkel φ (1 Zahl)

$\Leftrightarrow$ Matrix D (9 Zahlen!) und $DD^T = \mathbb{1}$ (9-3 = 6 Gleichungen) ✓

4.2 Tensoren 2. Stufe

$H_{j_1 j_2 \dots j_n}$ ist Tensor n-ter Stufe $\Leftrightarrow$ die Elemente bei Ko-Syst Drehung (D) übergehen in

$$H'_{j_1 \dots j_n} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \cdots D_{j_n k_n} H_{k_1 \dots k_n}$$

Stufe n	Name	Schema	Transformation
0	Skalar	eine Zahl c	$c' = c$
1	Vektor	Tripel $\vec{a}$	$\vec{a}' = D\vec{a}$
2	Tensor 2. St.	Matrix H	$H' = DHD^T$ (s.u.)
3	z.B. ε_{ijk}	Kubus	s.o.

n=0 Skalare sind m, q, c, Temp T, $V(\vec{r})$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$, $Sp(H)$ (s.u.), $\det(H)$ (s.u.)

n=1 Vektoren, s. halbes WS

n=2 Tensoren 2. Stufe

$H'_{j_1 j_2} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} H_{k_1 k_2} = D_{j_1 k_1} H_{k_1 k_2} (D^T)_{k_2 j_2}$

d.h. $H' = DHD^T$

((verstehen jetzt: $Sp(H') = Sp(DHD^T) = Sp(HD^T D) = Sp(H)$

und $\det(H') = \det(D)\det(H)\det(D^T) = \det(H)$))

Philo: Waren immer stolz auf vektoriell formulierte Zus-hänge. Respektieren die Invarianz der Natur unter Ko-Syst-Drehungen. Jede Natur-Größe muß sich verhalten unter Drehungen, ist also Skalar oder Vektorkomp. oder Tensorkomp.

$\boxed{\text{jede phys. Größe ist als Komponente eines Tensors zu identifizieren}}$

jede Antwort-Matrix ist Tensor 2. Stufe

$\vec{j} = \underline{\sigma}\,\vec{E}$, $\vec{K} = -\underline{K}\,\vec{r}$, $\vec{v} = \underline{(\vec{\omega}\times\ )}\,\vec{r}$, $\vec{L} \overset{!}{=} \underline{\underline{I}}\,\vec{\omega}$ Übungsaufgabe $= m\vec{r}\times\vec{v}$

Struktur: $\overrightarrow{\text{Antwort}} = (\text{Matrix})\ \overrightarrow{\text{Ursache}}$

$\vec{a} = H\ \vec{u}$ (*) ((Matrix diag $\Rightarrow$ Glg. entkoppeln $\hat{=}$ einfach!))

Frage nach H' in $\vec{a}' = H'\vec{u}'$

D auf (*) anwenden: $\vec{a}' = D\vec{a} \overset{!}{=} DH\vec{u} = DHD^TD\vec{u} = \underbrace{DHD^T}_{\equiv H'}\vec{u}'$

$\Rightarrow (H' - DHD^T)\vec{u}' = \vec{0} \quad \forall \vec{u}'$

$\Rightarrow$ H ist Tensor 2. Stufe

(($\vec{a} = \vec{u} = \mathbb{1}\vec{u}$: auch $\mathbb{1}$ ist Tens. 2. St.))

$\rightsquigarrow$ ein linearer Zus.hang zw. 2 Vektoren definiert stets einen Tensor 2. Stufe

Bsp

z.B. Ziehen eines Schlittschuhläufers

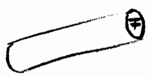
$\vec{v} = H\vec{K}$

jump zu 4.3

Bsp σ: e^- im Draht

Ladungs-Stromdichte $\vec{j} = \dfrac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}\ \perp\vec{e}}\ \vec{e}$

(Energie-, Teilchen- ...)



in Δt fließt durch F das Volumen $F\cdot(v\,\Delta t)$, und die Anzahl $\frac{N}{V}\cdot F(v\,\Delta t)$ Teilchen

$\vec{j} = \dfrac{q\cdot\frac{N}{V}\cdot F\cdot v\,\Delta t}{\Delta t\ \ F}\ \vec{e} = q\frac{N}{V}\vec{v} = q\frac{N}{V}Hq\vec{E} =: \underline{\underline{\sigma}}\vec{E}$

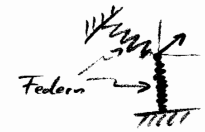
"Leitfähigkeitstensor"

($\vec{E}$-Richtung so, daß $\vec{j} \parallel \vec{E}$? s. 4.3 ; $j = \sigma E$

dann (Strom = Ladung pro Zeit = Fj)

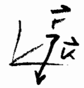
$I = \underbrace{F\frac{\sigma}{L}}_{\frac{1}{\text{"Widerst."}}}\ \underbrace{LE}_{\text{"Spannung"}} = \frac{U}{R}$ "Ohm"))

Bsp K:



Federn

Ursprung in Gleichgew.-Position



$\vec{K} = -K\vec{r} + O(r^2)$

(($\vec{r}$-Richtung so, daß $\vec{K} \parallel \vec{r}$? s. 4.3))

existiert ein Potential $V(\vec{r})$?

2D: $K = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}$

$\partial_x V \overset{!}{=} -K_1 = \kappa_{11}x + \kappa_{12}y$, $V = \frac{\kappa_{11}}{2}x^2 + \kappa_{12}xy + f(y)$

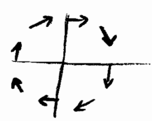
$\partial_y V = \kappa_{12}x + f'(y) \overset{!}{=} -K_2 = \kappa_{21}x + \kappa_{22}y$

$\Rightarrow$ nur für $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ existiert $V = \frac{\kappa_{11}}{2}x^2 + \frac{\kappa_{22}}{2}y^2 + \kappa_{12}xy$

allg: $K = K^T \Leftrightarrow \vec{K} = -K\vec{r}$ hat $V = \frac{1}{2}\vec{r}K\vec{r}$

((der 2. Term in $K = \frac{1}{2}(K + K^T) + \underline{\frac{1}{2}(K - K^T)}$

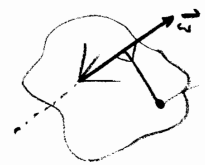
gilt rotierende Kraft: $\vec{K}_{\underset{\sim}{2.\text{Term}}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \kappa_{12}-\kappa_{21} \\ \underbrace{\kappa_{21}-\kappa_{12}}_{\equiv 2\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$= (\alpha y, -\alpha x)$))

Bsp I: "Trägheitstensor"

starrer Körper
Achse $\vec{\omega}$ verlötet
Ursprung auf Achse



a-ter Massenpkt

$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a = \sum_a m_a\vec{r}_a\times\vec{v}_a =: I\vec{\omega}$ definiert I

falls $\vec{L}_a = I_a\vec{\omega}$, dann $\vec{L} = \sum_a I_a\vec{\omega}$, d.h. $I = \sum_a I_a$

(... Bsp I)

bac-cab: $\vec\omega(\vec r\cdot\vec r)-\vec r(\vec r\cdot\vec\omega)$

$$\vec L_a = m_a \vec r_a \times (\vec\omega \times \vec r_a) = \underbrace{m_a \left(r_a^2 \mathbb{1} - \vec r_a \circ \vec r_a\right)}\vec\omega$$

$$I_a = m_a \begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2-y^2 & -yz \\ -zx & -zy & r^2-z^2 \end{pmatrix}_{\text{alles Index } a}$$

$$\Rightarrow I = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ & x^2+z^2 & -yz \\ sy. & & x^2+y^2 \end{pmatrix}_a$$

es ist $\vec L' = I'\vec\omega'$ mit $I' = D I D^T$

((denn: $\vec L' = D\vec L = DI\vec\omega = DID^TD\vec\omega = I'\vec\omega'$))

(($\vec\omega$ so, daß $\vec L \parallel \vec\omega$? d.h. daß $I\vec\omega = \text{const}\cdot\vec\omega$? s. 4.3))

Philo I-Komponenten hängen von Position des Körpers, und damit i.A. von der Zeit ab.
→ Drehmomente $\partial_t \vec L = \vec r \times \vec K$ machen Achsen-Lager kaputt! "Auswuchten ≙ Achse ∥ Hauptachse"

Schwerpkt des st. Kö.: $M = \sum_a m_a$

$\vec R := \frac{1}{M}\sum_a m_a \vec r_a$

4.3. Hauptachsentransformation

gegeben: ein symm. Tensor H, d.h. $H^T = H$

Beh.: stets existiert (mind.) ein D derart, daß

$$H' = DHD^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$, d.h. H' diagonal wird.

Frage: $D = ?$

Frage clever aufschreiben: suche $\vec f$'s in

$$\begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec f_1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ H\vec f_1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec f_1 H\vec f_1 & \vec f_1 H \vec f_2 & 1\,3 \\ \vec f_2 H \vec f_1 & \vec f_2 H \vec f_2 & 2\,3 \\ \vec f_3 H \vec f_1 & 3\,2 & 3\,3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

⇝ es muß $H\vec f_1 = \lambda_1 \vec f_1$, $H\vec f_2 = \lambda_2\vec f_2$, ... sein

⇒ müssen also $H\vec f = \lambda\vec f$ lösen

und 3 orthonormierte $\vec f$'s mit je zugehörigen reellen λ's erhalten.

Das geht immer, denn:

A) $\vec f$ ist normierbar ($H\vec f = \lambda\vec f$ legt Betrag nicht fest)

B) $\vec f$'s zu verschiedenen λ's sind automatisch orthogonal:

$H\vec f_1 = \lambda_1\vec f_1 \;\Rightarrow\; 0 = H\vec f_1 - \lambda_1\vec f_1$ multipl. m. $\vec f_2$ v. links

$0 = \underline{\vec f_2 H \vec f_1} - \lambda_1 \vec f_1 \vec f_2$ $\qquad H\vec f_2 = \lambda_2 \vec f_2$

$= (H^T\vec f_2)\vec f_1 = (H\vec f_2)\vec f_1 \stackrel{\wedge}{=} \lambda_2 \vec f_2 \vec f_1$

$= (\lambda_2 - \lambda_1)\vec f_1 \vec f_2$ ged.

C) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ können (ohne $\vec f$-Kenntnis) aus einer kubischen Glg. erhalten werden, denn das hom. Gl.-Syst $(H-\lambda\mathbb{1})\vec f = \vec 0$ ist nur lösbar, wenn

$$\det(H-\lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22}-\lambda & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(H_{11}+H_{22}+H_{33}) - \lambda(H_{11}H_{22}+H_{11}H_{33}+H_{22}H_{33}) + \det(H)$$

$= 0$ ist.

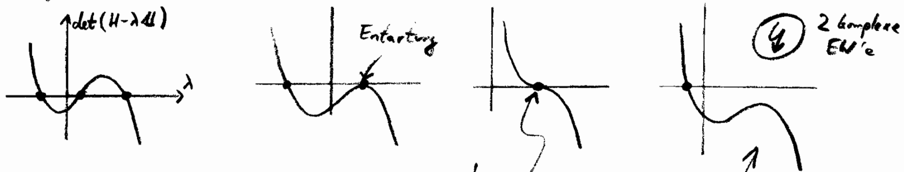
(($\begin{pmatrix} -\vec a- \\ -\vec b- \\ -\vec c- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | \\ \vec f \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt $\vec a\vec f = \vec b\vec f = \vec c\vec f = 0$ zu erfüllen.

$\vec f \neq \vec 0$ nur möglich, wenn $\vec a, \vec b, \vec c$ in einer Ebene,

d.h. Spatprodukt = Determinante = 0))

$= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$

Möglichkeiten:



((z.B. $H = \mathbb{1}$, $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$;
$\lambda = 1$ ist dreifach entartet))

((In $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda^2-2p\lambda+q) = 0$
und in $\lambda_{2/3} = p \pm \sqrt{p^2-q}$ könnte $q > p^2$ sein.
Dann ist i nötig, $i \cdot i = -1$, und $\lambda_{2/3} = p \pm i\sqrt{q-p^2}$))

D) die EW $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind <u>reell</u>, d.h. 4 tritt nie ein; denn:

$H\vec{f} = \lambda\vec{f} \;\Rightarrow\; \lambda\vec{f}^{*}\vec{f} = \vec{f}^{*}H\vec{f} = (H^T\vec{f}^{*})\vec{f} = \lambda^{*}\vec{f}^{*}\vec{f}$

$\Rightarrow \lambda = \lambda^{*}$ (($\lambda = a+ib = a-ib = \lambda^{*} \Rightarrow b = 0$))

((Größe* = Größe$|_{i\to -i}$))

E) bei Entartung ($\frac{2}{3}$ λ's gleich) ist ein orthonormiertes $\frac{2}{3}$-Bein <u>wählbar</u>:

$$\left.\begin{aligned} H\vec{f}_1 &= \lambda\vec{f}_1 \\ H\vec{f}_2 &= \lambda\vec{f}_2 \end{aligned}\right\}$$
jede LK aus $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ ist EV zu EW λ
⇒ also wähle zu λ zwei orthogonale $\vec{f}$'s

$H\vec{f}_3 = \lambda_3\vec{f}_3$

HT-Rezept

I $H = H^T$ erfüllt? (<u>sieht</u> man: H symmetrisch)

II löse $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = 0$
(kubische Glg: λ_1 raten. dann $\det = (\lambda_1-\lambda)$(quadr. Glg.))

III Probe: $Sp(H) \overset{?!}{=} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ (und auch: $\det(H) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$)

IV löse $(H-\lambda_1\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}_1$. normiere $\vec{f}_1$ ($|\vec{f}_1| = 1$).
dito für λ_2. dito für λ_3.

V Probe: Orthogonalität, d.h. $\vec{f}_1\vec{f}_2 = \vec{f}_1\vec{f}_3 = \vec{f}_2\vec{f}_3 = 0$

VI Rechtssystem? (evtl ein $\vec{f}$-Vorzeichen ändern) (a) malen (b) $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$ (c) $\det(D) = +1$

VII Resultat notieren: $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} - & \vec{f}_1 & - \\ - & 2 & - \\ - & 3 & - \end{pmatrix}$

HT "anschaulich"

was ist H (sy. Matrix) anschaulich?

e.g. Federn im Raum

Lese H als Potential von $\vec{K} = -2H\vec{r}$
$V = \vec{r}H\vec{r}$

((check: $\partial_x V = (\partial_x\vec{r})H\vec{r} + \vec{r}H(\partial_x\vec{r}) = 2\vec{r}H\vec{e}_x = 2\vec{r}\,\vec{f}_1 = -K_x$ ✓))

$\begin{pmatrix} - & \vec{f}_1 & - \\ - & 2 & - \\ - & 3 & - \end{pmatrix}$

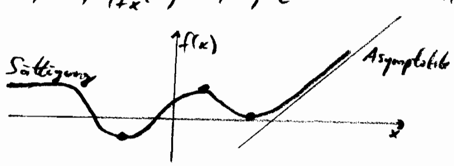
lasse z.B. Computer die [Äquipotentialflächen] $\vec{r}H\vec{r} = \text{const}$ malen.

$\vec{r}H\vec{r} = \underbrace{\vec{r}D^T}_{}\underline{DHD^T}D\vec{r} = \vec{r}'H'\vec{r}' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = \text{const}$

⇒ (schief im Raum hängendes) **Ellipsoid** oder **Hyperboloid**

5. Funktionen

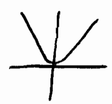
$x, x^2, \frac{1}{1+x^2}, c, s, e^x$ — nur wenige mehr werden benötigt

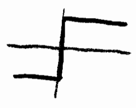
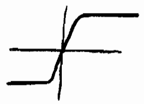


Funktionen der Natur sind (i.d. Regel) <u>"weich"</u>,
jedoch manchmal Intervall-beschränkt (z.B. r-Achse).
Haben wir Menschen eine <u>pathologische</u> Stelle auf dem Papier,
so kommt meist deren <u>eingebettete</u> Version der Wahrheit näher.

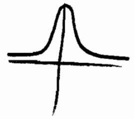
<u>pathologische Stellen</u> unter der Lupe

ε winzig!

Knick, z.B. $|x|$,  ; $\sqrt{x^2+\varepsilon^2}$, 

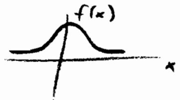
Stufe, z.B. $\frac{x}{|x|}$,  ; $\frac{x}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}$, 

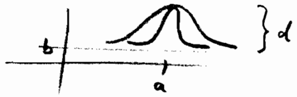
Pol, z.B. $\frac{1}{x}$,  ; $\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}$, 

quadr. Singularität , z.B. $\frac{1}{x^2}$,  ; $\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}$, 

5.1. Skala-Änderungen, Vokabeln

Verschieben etc.



, 

$b + d f(c[x-a])$

Spiegeln $f(-x)$ an f-Achse , $-f(x)$ an x-Achse , $-f(-x)$ am Ursprung

gerade/ungerade

f ist gerade (g) $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

f ist ungerade (u) $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

((Bsp: g: $\cos(x)$, $\frac{1}{1+x^2}$; u: $\sin(x)$, $\frac{x}{1+x^2}$))

$g \cdot u = u$, $u \cdot u = g$

$\partial_x g = u$, $\partial_x u = g$

((denn $\frac{g(-x+\varepsilon)-g(x)}{\varepsilon} = -\frac{g(x-\varepsilon)-g(x)}{-\varepsilon}$))

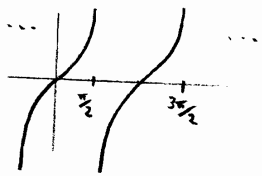
allg.: $f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))}_{g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(f(x)-f(-x))}_{u}$

g-u-Bsp. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

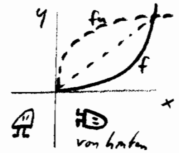
ist ungerade

π-periodisch

hat ∞ viele Pole



Umkehrfkt $f_u(x) :=$ an Diagonale gespiegeltes $f(x)$



$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ \Rightarrow x = f_u(y) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = f(f_u(y)) \\ x = f_u(f(x)) \end{array}$$

$$f_u'(x) = \frac{1}{f'(f_u(x))} \quad , \text{ denn}$$

∂_x auf $x = f(f_u(x))$ gibt $1 = f'(f_u(x)) \cdot f_u'(x)$ ■

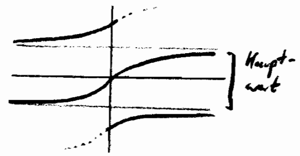
((Bsp: $f = x^2$, $f_u = \sqrt{x}$, $f_u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$))

Anw.-Bsp $f(x) = \tan(x)$, $f_u(x) =: \arctan(x)$

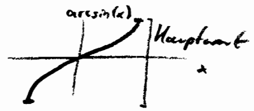
$\partial_x \tan(x) = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{c^2+s^2}{c^2} = 1 + \tan^2(x)$

$\partial_x \underline{\arctan(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$

„Stammfunktion" zur Lorentz-Kurve



$\partial_x \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



5.2. e-Funktion

14 Wünsche an jede neue Fkt – am Bsp dieser neuen.

s. z.B. Gliederung in [Abramowitz/Stegun, Handbook of math. fcts]

- $_1$ Name : e-Funktion
- $_2$ Bezeichnung : $\exp(x)$ (vorläufig)
- $_3$ Bedarf : (a) Wachstum $\boxed{\dot{N} = \alpha N, \ N(0) = N_0}$ $[\alpha] = 1/\text{Zeit}$

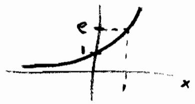
Ans $N(t) = N_0 f(\alpha t)$; $N_0 f' \cdot \alpha = \alpha N_0 f$, $N_0 f(0) = N_0$

$\Rightarrow f \in R$: $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$

(b) $m\dot{v} = -m\lambda v$, $v(0) = v_0$

Ans $v(t) = v_0 f(-\lambda t)$; $\underline{-\lambda v_0} f' = \underline{-\lambda v_0} f$, $f(0) = 1$

● 4 Def: $\exp(x) :=$ Lsg von $\boxed{f'(x) = f(x),\ f(0) = 1}$

● 5 Verlauf:  $f(1) =: e \approx 2.72$

● 6 Funktionale Beziehung

$\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)} =: g(x)$, $g(0) = 1$, $g'(x) = \dfrac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$

$\Rightarrow$ g erfüllt auch $\boxed{\cdots}$

$\Rightarrow$ $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

$\Rightarrow$ $\exp(x) = e^x$

((denn: $\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left(\left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n\right)^{\frac{m}{n}}$
$= \left[\exp(1)\right]^{\frac{m}{n}}$))

● 7 Ableitung: e^x

● 8 Stammfunktion: e^x

● 9 Dgln $\partial_x e^x = e^x$, $\partial_x^2 e^{\pm x} = e^{\pm x}$

(($\ddot{x} = +\omega^2 x$ mit Ansatz $Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$))

(($\dot{N} = \alpha N - \beta$, $N(0) = N_0$ mit (a) Ansatz (b) $N = u + a$ (c) $N = e^{\alpha t} c(t)$

(d) „direkt" $N(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \left(\begin{smallmatrix}\text{Dgl-ohne-}\beta\\ \text{Lsg}\end{smallmatrix}\right)$
$= \frac{\beta}{\alpha} + (\qquad)e^{\alpha t}$
$= \frac{\beta}{\alpha} + (\quad -\frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t}$
$= \frac{\beta}{\alpha} + (N_0 - \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t}$))

● 10 Reihe: $f = c_0 + c_1 x$ in $\boxed{f' = f,\ f(0) = 1}$ ersetzen,

gibt $c_1 = c_0 + c_1 x$, $c_0 = 1$
↳ oh! Brauche auch $+ c_2 x^2$ in f!

$c_1 + 2c_2 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$
↳ oh! Brauche ... alle Potenzen!

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in $\boxed{f' = f,\ f(0) = 1}$ ersetzen.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, $m = n-1$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1}$

$\Rightarrow$ $c_n = \frac{1}{n} c_{n-1}$ für $n = 1, 2, \ldots$ und $c_0 = 1$

$c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$, ... $c_n = \frac{1}{n!}$ mit $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$ $(n \geq 1)$
$0! := 1$

also $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$; kann auch als exp-Def nehmen.

die Summe hat $\forall x$ einen endlichen Wert
(„die Reihe konvergiert $\forall x$"), denn

gegeb. x, a = natürl. Zahl $\gtrsim x$,

$\sum \frac{1}{n!} x^n = 1 + \ldots + \frac{a^{10a}}{(10a)!}\left[1 + \frac{a}{10a+1} + \frac{a^2}{(10a+1)(10a+2)} + \ldots\right]$

und $[\cdot] < 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = 1.111\ldots$

● 11 Werte: z.B. per Reihe

● 12 Asymptotik, $x \to \infty$:

$\frac{1}{x^m} e^x \to \infty$, $x^m e^{-x} \to 0$ (e^{-x} erschlägt jede Potenz)

e^x als Asymptotik $\boxed{f' = f,\ f(0) = 1}$ per Computer,

aus Def. Ableitung + Dgl.

$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f(x) = (1+\varepsilon) f(x)$ $(\varepsilon \to 0)$

$f(x + N\varepsilon) = (1+\varepsilon)^N f(x)$

$x=0$: $f(N\varepsilon) = (1+\varepsilon)^N$
↳ nenne dies wieder x; trotz $\varepsilon \to 0$: N beliebig groß, $N = \frac{x}{\varepsilon}$

$f(x) = e^x = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$

ist auch e^x-Def, (eher exotisch)

●[13] Umkehrfkt:

$\ln(e^x) = x \,, \quad e^{\ln(x)} = x$

$\partial_x \ln(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

$\ln(xy) = \ln(e^{\ln x} e^{\ln y}) = \ln(e^{\ln x + \ln y}) = \ln(x) + \ln(y)$

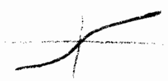
$\ln(\frac{1}{x}) \overset{x = e^u}{=} \ln(e^{-u}) = -u = -\ln(x)$

$10^x = [e^{\ln(10)}]^x = e^{x \underbrace{\ln(10)}_{= 2.3026}}$

$\ln(a + b\varepsilon) = \ln(a[1 + \frac{b}{a}\varepsilon]) \overset{\uparrow}{=} \ln(a) + \ln(1 + \frac{b}{a}\varepsilon)$
$= \ln(a) + \frac{b}{a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ → s. S. 43

●[14] verwandte Fkn

$e^x = \underbrace{\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})}_{\equiv \cosh(x)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})}_{\equiv \sinh(x)}$ → Umkehrfkt: $\mathrm{arsinh}(x)$ "Area Sinus Hyperbolicus"

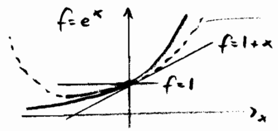


$\cosh' = \sinh \,, \quad \sinh' = \cosh$

$\cosh^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = 1 + \sinh^2$

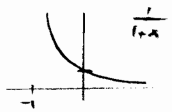
5.3. Potenzreihen

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ nicht nur für e^x ?

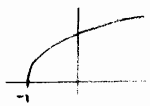


$\rightarrow f = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{(1+x)^2 + 1}{2}$

Strategie funktioniert doch auch bei:



$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots$



$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - x^2 + \ldots$

wenn $f = \Sigma$, dann: "habe $f(x)$ um $x = 0$ entwickelt".

funktioniert immer? — fast (bei Physiker-Fkn)
aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius

wann nicht? — an patholog. Stellen.
entwickle nicht $|x|, \frac{1}{x}, e^{-1/x^2}$ um $x = 0$

wozu? —
- kann x^n gut differenzieren und aufleiten
- mit Reihenanfängen Probleme vorab vereinfachen (s. Ü 35) $(\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin(\varphi) \approx -\frac{g}{\ell}\varphi)$
- Resultate discutieren, Grenzfälle messen (s. Ü 37)

|| • kenne f nicht, habe nur Gl. für f,
setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ an
und bestimme $c_0, c_1, \ldots$ aus der Gl.

(Bsp dazu war oben: e^x) (und ein Bsp: Ü 34/36)

weiteres Bsp: $f = 1 + xf$ "Dgl. nullter Ordnung"
hat Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zur Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} \,, \quad m = n-1$$
$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$\Rightarrow c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1}$ für $n \geq 1$ $\Rightarrow$ alle $c_n = 1$

||| $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{geometrische Reihe}, \ |x| < 1}$

Umgang mit Reihen ("Trickkiste") (|| Verfahrensweisen)

1. Abspalten (hier: Billig-Bsp v. oben; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist eine wilde Fkt)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + (\tfrac{1}{1-x} - 1) = 1 + x \cdot \tfrac{1}{1-x}$$
$$= 1 + x \cdot [1 + (\tfrac{1}{1-x} - 1)]$$
$$= \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^N}_{= \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}} + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

2. algebraische Umformung

$\sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

$1+x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2) x^2 + \dots$

$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$

3. aus Stammfkt ("Diff. einer Reihe")

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \partial_x 2\sqrt{1+x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

4. aus Ableitung ("Int. einer Reihe")

$\partial_x(-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

$-\ln(1-x) = A + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

$x=0: \quad -\ln(1) = A \quad \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

5. Add. von Reihen

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = [e^x]_{\text{gerader Anteil}}$

$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$\sinh(x) = \partial_x \cosh(x)$

$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = [\ln(1+x)]_{\text{ungerade}}$

$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

6. aus Dgl, z.B. cos-Reihe aus $\boxed{f'' = -f,\ f'(0) = 0,\ f(0) = 1}$:

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

(7. Division v. Reihen: $\tan(x) = \frac{s}{c} = (c_0 + c_1 x + \dots)$

$\Rightarrow$ (sin-Reihe) $= (c_0 + c_1 x + \dots)$ (cos-Reihe), ausmult. $\Rightarrow c_0, c_1, \dots$

8. aus $f(f_u(x)) = x$

9. aus funktionalen Beziehungen)

10. mittels $\boxed{i \cdot i = -1}$, $(ix)^2 = -x^2$, $(ix)^3 = -ix^3$

$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$

$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{Euler'sche Formel}}$

$\cos(x) = [e^{ix}]_{\text{gerade}} = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\quad \cos(ix) = \cosh(x)$

$\sin(x) = \frac{1}{i}[e^{ix}]_{\text{ungerade}} = \frac{1}{2i}(\ -\ )$, $\quad \sin(ix) = i \cdot \sinh(x)$

11. Taylor-Reihe

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

$f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2c_2$, $f'''(0) = 2 \cdot 3\, c_3$, ...

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$

(warum nicht gleich? oft unhandlich; z.B. f'' zu Ü32(a): ganze Seite))

Bsp: $f = (1+x)^\lambda$, $f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$

$\underbrace{(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x}_{\text{oft gebraucht}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \dots$

Zaubertrick zu Taylor:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \partial_b^n f(b)\big|_{b=0}$

$= e^{x\partial_b} f(b)\big|_{b=0}$

((generell: $e^{Op.} = 1 + Op. + \frac{1}{2!}Op.^2 + \dots$))

Entwickeln um $x = a$:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n = e^{(x-a)\partial_b} f(b)\big|_{b=a}$

$f(x+a) = e^{x\partial_b} f(b)\big|_{b=a} = e^{x\partial_a} f(a)$

$f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x) \equiv T_a f(x) \qquad (*)$

"Translationsoperator" verschiebt Argument um $+a$

zwei (*)-Tests: • $f(x) = x^2$, $(x+a)^2 \overset{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots)x^2$

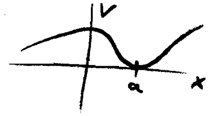
$= x^2 + 2ax + a^2$, tatsächlich!

• $f(x) = e^x$, $e^{x+a} \overset{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots)e^x = e^x(1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots) = e^x e^a$ ✓

Taylor-Anwendung in Physik:

meist nur bei allg. Betrachtungen

wie z.B. bei kleinen Schwingungen um V-Min. bei $x=a$:



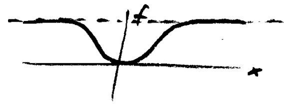
$$V(x) = \underbrace{\cancel{V(a)}}_{\text{egal in } V} + \underbrace{V'(a)}_{=0}(x-a) + \frac{V''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

Potential

$$m\ddot{x} = -\partial_x V(x) = -V''(a)(x-a)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{V''(a)}{m}}$$

Warnung $f(x) = e^{-1/x^2}$



$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (\dots) e^{-1/x^2}, \quad f''(0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 0$$

Taylor $= 0 + 0 + 0 + \dots \neq f(x)$

Grund: $x=0$ ist pathologische Stelle

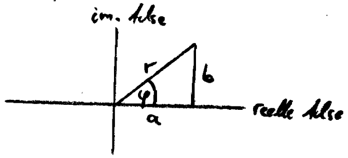
Komplexe Zahlen

sind i enthaltende Bildungen ($=: z$, z.B. $z = \frac{1}{2-3i}$)

können stets auf die Form $z = \underbrace{a}_{Re(z)} + i\underbrace{b}_{Im(z)}$ gebracht werden

(z.B. $z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2}{13} + i\,\frac{3}{13}$)

können als Pkt in "komplexer Ebene" dargestellt werden:



mit $r = \sqrt{a^2+b^2} =: |z|$

ist $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r e^{i\varphi}$ (φ = "Phase")

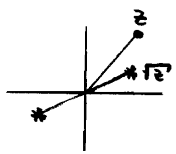
$z^* := a - ib = r e^{-i\varphi}$

$2\,Re(z) = a+ib + a-ib = z + z^* =: z + c.c.$

Auch $z = r e^{i(\varphi + 2\pi n)}$ gilt ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

und ist bei Wurzeln wichtig:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi n}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i\left\{\begin{matrix}\varphi/2 \\ \varphi/2 + \pi\end{matrix}\right.} :$$



wegen $-1 = e^{i(\pi + 2\pi n)}$ ist insbes. $\sqrt{-1} = \left\{\begin{matrix} i \\ -i\end{matrix}\right.$

(($i := \sqrt{-1}$ ist falsch: $-1 = i \cdot i \overset{\text{?}}{=} \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = +1$))

5.4 Störungsrechnung

Ein Problem (Gln. für $f(x;\alpha)$) habe einen kleinen Parameter (α).

Kann die Lsg als Reihe in α-Potenzen suchen, d.h.

$$f(x;\alpha) = \underbrace{c_0(x)}_{f^{(0)}(x)} + \underbrace{c_1(x)\,\alpha}_{f^{(1)}(x)} + \underbrace{c_2(x)\,\alpha^2}_{f^{(2)}(x)} + \dots$$

in die f-Gln. einsetzen, um $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots$ zu bestimmen.

zur Notation: wir kennen (? s. Ü33 für $v_0 = 0$, oder sonst)

$$v(t;\lambda,g) = -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$$ als Lsg. v. $\boxed{\dot{v} = -g - \lambda v, \; v(0) = v_0}$

sofort: v_∞ aus $\dot{v} = 0$

(freier Fall + Reibung)

$$= -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)\left(1 - \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \dots\right)$$ falls λ "klein"

(genauer: für $\lambda t \ll 1$, $\forall\, t < t_0$ = Aufprall)

$$= \underbrace{v_0 - gt}_{v^{(0)}(t)} \; \underbrace{- \lambda v_0 t + \frac{g}{2}\lambda t^2}_{v^{(1)}(t)} + O(\lambda^2) \qquad (*)$$

Einschub: $\boxed{\dot{v} = -g - \lambda v, \; v(0) = v_0}$, $v(t) = ?$ (("Fallschirmspringer"))

stört! sonst: $v \sim e^{-\lambda t}$

Ans $v(t) = A + u(t)$

$\dot{u} = -g - \lambda A - \lambda u$ wird einfacher mit $A = -\frac{g}{\lambda}$

$\boxed{\dot{u} = -\lambda u, \quad u(0) = v_0 + \frac{g}{\lambda}}$

Lsg $u(t) = u(0)\, e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow$ Lsg $v(t) = -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ ✓

Bsp A $\boxed{\dot v = -g - \lambda v,\ v(0) = v_0}$

weiß nichts von e-Fkt

λ sei klein $\left(\left([\lambda] = \frac{1}{Zeit},\ \lambda \ll \frac{g}{v_0} \right)\right)$

$v(t) = v^{(0)}(t) + v^{(1)}(t) + \ldots$, in ER einsetzen

$\dot v^{(0)} + \dot v^{(1)} + \ldots = -g - \lambda(v^{(0)} + \ldots)$, $v^{(0)}(0) + v^{(1)}(0) + \ldots = v_0$

"$ER^{(0)}$" $\Rightarrow$ $\boxed{\dot v^{(0)} = -g,\ v^{(0)}(0) = v_0}$ $\Rightarrow v^{(0)}(t) = v_0 - gt$

"$ER^{(1)}$" $\Rightarrow$ $\boxed{\dot v^{(1)} = -\lambda v^{(0)} = -\lambda v_0 + \lambda g t,\ v^{(1)}(0) = 0}$ $\Rightarrow v^{(1)}(t) = -\lambda v_0 t + \lambda \frac{g}{2} t^2$

...

$\rightsquigarrow v^{(0)} + v^{(1)} = (\ast)$. Es funktioniert!

Bsp B Wurfexperiment, um Abweichung von $K = -mg$ nachzuweisen

$\left(\text{Gravi}:\ m(R+z)^{\cdot\cdot} = -\gamma \frac{mM}{(R+z)^2},\ g := \frac{\gamma M}{R^2} \right)$

$\boxed{\ddot z = -\frac{gR^2}{(R+z)^2},\ \dot z(0) = v_0,\ z(0) = 0}$

$\frac{1}{R}$ sei "klein". ((wogegen? z.B. gegen $\frac{1}{\text{Steighöhe}} = \frac{1}{v_0^2/2g}$

aus E-Satz: $\frac{m}{2} v_0^2 + 0 = 0 + mgh$))

$\ddot z^{(0)} + \ddot z^{(1)} + \ldots = -g \frac{1}{\left(1 + \frac{z^{(0)}}{R} + \frac{z^{(1)}}{R} + \ldots\right)^2} = -g\left(1 - 2\frac{z^{(0)}}{R} + \ldots\right)$

$ER^{(0)} \Rightarrow$ $\boxed{\ddot z^{(0)} = -g,\ \dot z^{(0)}(0) = v_0,\ z^{(0)}(0) = 0}$ $\Rightarrow z^{(0)}(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$

$ER^{(1)} \Rightarrow$ $\boxed{\ddot z^{(1)} = 2g\frac{z^{(0)}}{R},\ \dot z^{(1)}(0) = 0,\ z^{(1)}(0) = 0}$ $\Rightarrow \ldots$

usw.

— Ende § 5.4

warum sind Reihenentw. (fast) immer möglich?

- weil wir uns nur mit Kombinationen aus $x, e^x, i, f_n, f(g), \pm, \cdot, \div, \partial_x, \int, \ldots$ zu arbeiten vorstellen (55.08)
- weil die Natur "weich" ist

— Ende Kap. 5, Ende Klausur-Stoff ————

Potenzreihen: Koch'sche Schneeflocke

Konstruktionsvorschrift

Frage: Flächeninhalt = ?

$F(a) = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{4-1} = a^2 \frac{\sqrt3}{4}$

$F_0 = F(a)$

$F_1 = F_0 + 3 \cdot F\left(\frac{a}{3}\right)$

$F_2 = F_1 + 3 \cdot 4 \cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3}\right)$

$F_3 = F_2 + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot F\left(\frac{a}{3\cdot3\cdot3}\right)$

$\vdots$

$F_n = F_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$

$\vdots$

$F_\infty = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{n-1} \cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$

$= a^2\frac{\sqrt3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{a^2}{3^{2n}} \frac{\sqrt3}{4}$

$= a^2\frac{\sqrt3}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1 = \frac{4}{5}$

geom. Reihe! (5.42) $\left(\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right.$

$= a^2 \frac{\sqrt3}{4} \frac{8}{5} = a^2 \frac{2\sqrt3}{5}$

Frage: Umfang = ?

$U_0 = 3a$

$U_1 = \frac{4}{3} U_0$

$U_2 = \frac{4}{3} U_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U_0$

$\vdots$

$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0 \quad \Rightarrow U_\infty = \infty$!