wenn $f = \Sigma$, dann: "habe $f(x)$ um $x=0$ entwickelt".

funktioniert immer? — fast (bei Physiker-Fkn)

aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius

wann nicht? — an patholog. Stellen.

entwickle nicht $|x|$, $\frac{1}{x}$, e^{-1/x^2} um $x=0$

wozu? —
- kann x^n gut differenzieren und aufleiten
- mit Reihenanfängen Probleme vorab vereinfachen (s. Ü 35) $\left(\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin(\varphi) \approx -\frac{g}{\ell}\varphi \right)$
- Resultate diskutieren, Grenzfälle ansehen (s. Ü 37)
- || kenne f nicht, habe nur Gl. für f, setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ an und bestimme $c_0, c_1, \dots$ aus der Gl.

(Bsp dazu war oben: e^x) (noch ein Bsp: Ü 34/36)

weiteres Bsp: $f = 1 + xf$ "Dgl. nullter Ordnung"

hat Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zur Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \overset{!}{=} 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} \quad , m = n-1$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \overset{!}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$\Rightarrow c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1}$ für $n \geq 1$ $\Rightarrow$ alle $c_n \equiv 1$

||| $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{geometrische Reihe}, \ |x|<1}$

Umgang mit Reihen ("Trickkiste") (|| Verfahrensweisen)

1. Abspalten (hier: Billig-Bsp v. oben; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist eine wilde Fkt)

$$\frac{1}{1-x} \overset{!}{=} 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$\overset{!}{=} 1 + x \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\right]$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N}_{= \frac{1-x^{N+1}}{1-x}} + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

2. algebraische Umformung

$$\sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$
$$1+x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2) x^2 + \dots$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{8} x^2 + \dots$$

3. aus Stammfkt („Diff. einer Reihe")

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \partial_x \, 2\sqrt{1+x} = 1 - \tfrac{1}{2} x + \tfrac{3}{8} x^2 + \dots$$

4. aus Ableitung („Int. einer Reihe")

$$\partial_x \left(-\ln(1-x)\right) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$
$$-\ln(1-x) = A + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$
$$x=0: \quad -\ln(1) = A \quad \Rightarrow A = 0$$
$$\Rightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

5. Add. von Reihen

$$\cosh(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = [e^x]_{\text{gerader Anteil}}$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$
$$\sinh(x) = \partial_x \cosh(x)$$
$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$
$$\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = [\ln(1+x)]_{\text{ungerade}}$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

6. aus Dgl, z. B. cos-Reihe aus $\boxed{f'' = -f,\ f'(0) = 0,\ f(0) = 1}$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(**7.** Division v. Reihen: $\tan(x) = \frac{s}{c} = (c_0 + c_1 x + \dots)$

$\Rightarrow$ (sin-Reihe) $= (c_0 + c_1 x + \dots)$ (cos-Reihe), ausmult, $\Rightarrow c_0, c_1, \dots$

8. aus $f(f_u(x)) = x$

9. aus funktionalen Beziehungen)