Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 12** 24.01.2007

[Abgabe 31.01 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 35: vier quickies mit i (0.5+0.5+0.5+0.5=2 Punkte)

Zur Erinnerung: jede komplexe Zahl z kann man als $z = a + ib$ schreiben.

(a) $\frac{1+i}{1-i} = ?$

(b) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i\,\sinh(x)}\right) = ?$

(c) $\tanh(ix) = ?$

(d) Wie folgen aus $e^{2i\alpha} = e^{i\alpha}e^{i\alpha}$ die Relationen $\cos(2\alpha) = \ldots$ und $\sin(2\alpha) = \ldots$?

Aufgabe 36: Störungsrechnung ausprobieren (1.5+2.5=4 Punkte)

(a) In Aufgabe **33** hatten wir zu $\boxed{\ddot{x} = 2\,a\,\omega^2\,e^{-x/a} - \frac{1}{a}\,\dot{x}^2 \;,\; \dot{x}(0) = 0 \;,\; x(0) = 0}$ die exakte Lösung $x(t) = a\,\ln(1+\omega^2 t^2)$ erhalten. Per Störungsrechnung erster Ordnung in ω^2 sollte sich also $x(t) = a\,\omega^2 t^2$ ergeben. Wie?

(b) Auch zu $\boxed{\dot{v} = -\lambda\,(1+\omega t)\,v \;,\; v(0) = v_0}$ kennen wir mit $v(t) = v_0\,e^{-\lambda t - \lambda\omega t^2/2}$ die exakte Lösung (bestätigen Sie dies durch Einsetzen). Worauf sollte also Störungsrechnung erster Ordnung in ω führen? Welchen ER erfüllt $v^{(0)}$? Mit welcher Lösung? Der ER für $v^{(1)}$ sieht nur im ersten Moment kompliziert aus, denn Übergang zu einer neuen Funktion u via $v^{(1)} = e^{-\lambda t}\,u$ vereinfacht die Differentialgleichung. Demnach ist $v^{(1)} = ?$ Schließlich notieren wir $v^{(0)} + v^{(1)}$ und vergleichen mit obiger Erwartung.

Aufgabe 37: Störungsrechnung anwenden (5 Punkte)

Die Story: Ende 2007 geht der Teilchenbeschleuniger LHC am CERN (Schweiz) in Betrieb. Dabei misslingt die Kalibrierung, und kurzzeitig entwischen ein paar Teilchen nach oben. Die Fluchtgeschwindigkeit ist weit überschritten, d.h. für alle x ist $E \gg V(x)$, oder auch: γ ist winzig. Später (die Erde ist aus Sicht des Teilchens längst punktförmig) wird ein solches Teilchen auf einem fernen Planeten registriert, nämlich zur Zeit $t_1 = a/v_0$ bei $x(t_1) = a$ mit $\dot{x}(t_1) = v_0$. Zu welcher Zeit t_0 ist das Teilchen am LHC verlorengegangen?

Was zu tun ist: Der ER für $x(t)$ enthält natürlich $\ddot{x} = -\gamma M/x^2$ als Dgl und die beiden oben angegebenen Daten zur Zeit t_1. Welche drei ER's für $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ entstehen bei Störungsrechnung nach γ? Lösen Sie die ersten beiden. Aus welcher Gleichung ist t_0 zu ermitteln? Welche zwei (der vier) Terme in $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$ kann man dabei vernachlässigen?

Wer t_0 sogar explizit anzugeben vermag, verdient 2 Zusatzpunkte.

Aufgabe 38: Taylor (1 Punkt)

Wiederholen Sie **Aufgabe 32 (a)**, aber diesmal per Taylor-Reihe.

Wie einfach war es doch dort, *ohne* Taylor $f(s) = \frac{s^2}{6} + \mathcal{O}(s^4)$ zu erhalten!