

Aufgabe 32: (Reihenanfang, um ein Problem vorab zu vereinfachen) (1+2+1+1=5 Punkte)

In jedem der folgenden vier Fälle schwingt eine Masse m um den Ursprung im Potential $V(x) = \kappa a^2 f(x/a)$, und genügt damit der Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$. Nach Reihenentwicklung von $f(s)$ bis mit s^2 (Taylor-Reihe verboten!) kann per $V(x) = \text{const} + \frac{1}{2} \kappa_{\text{eff}} x^2$ ein effektives Kappa abgelesen und folglich die Frequenz in der sich so ergebenden Schwingungsgleichung $\ddot{x} = -\omega^2 x$ als $\omega = \sqrt{\kappa_{\text{eff}}/m}$ angegeben werden.

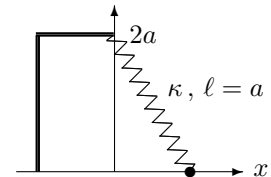
(a) $f(s) = \frac{1}{s^2} \left(\cos(s) - \cos[\sinh(s)] \right)$ ($\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{3m}}$ — aber wie kommt dies heraus??)

(b) $f(s) = \frac{2 \cosh(s)}{2 - \cosh^2(s)} = \partial_s \ln \left(\frac{1 + \sinh(s)}{1 - \sinh(s)} \right)$

einmal via ch-Reihenanfang, zum anderen per Entwicklung des ln.

(c) $f(s) = -\frac{\ln[1 + \cosh(s)]}{\cosh(s)}$

(d) m kann sich nur auf der x -Achse bewegen. Eine in Höhe $2a$ befestigte Feder ($\kappa, \ell = a$) sorgt für rücktreibende Kraft. $f(s) = ?$ Und $\omega = ?$



Aufgabe 33: (Reihe als Ansatz, um ein Dgl-Problem zu lösen) (4 Punkte)

Problem: $\ddot{x} = 2a\omega^2 e^{-x/a} - \frac{1}{a} \dot{x}^2$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$. $x(t) = ?$

Lösungsanleitung: Wir setzen $x(t) = a(c_2 t^2 + c_4 t^4 + c_6 t^6 + \dots)$ an, haben damit die Anfangsbedingungen bereits erfüllt, bestimmen c_2, c_4 und c_6 aus der Dgl und haben einen Verdacht, von welcher Funktion $x(t)$ damit der Reihenanfang entstanden sein könnte. Natürlich sehen wir nun explizit nach, ob die Vermutung den x -ER tatsächlich erfüllt.

Aufgabe 34: (Reihenanfänge zur Resultat-Diskussion) (1.5+1.5=3 Punkte)

Ein stabförmiger Himmelskörper wurde entdeckt. Er beginnt im Ursprung, ist unendlich dünn und unendlich lang, hat konstante lineare Massendichte σ ($:=$ Masse pro Höhenintervall) und zieht

eine Probemasse m an, die sich irgendwo bei $\vec{r}$ befindet. Am Anfang des Sommersemesters werden wir in der Lage sein, das Potential $V(\vec{r})$ dieser Kraft auszurechnen: $V(\vec{r}) = \gamma m \sigma \ln \left(\sqrt{z^2 + \rho^2} - z \right)$ mit $\rho^2 := x^2 + y^2$.



(a) Wenn sich m bei festem $z=h$ dem Stab nähert, sollte die Anziehungskraft nichts mehr vom „weit weg“ erscheinenden Stabende bemerken können. Wir ermitteln den bezüglich $\rho \rightarrow 0$ asymptotisch führenden V -Term und aus diesem die Kraft $\vec{K}$ auf m . Nähert sich m hingegen auf der z -Achse von unten her dem Stabende ($z=-\varepsilon$), so unterscheidet sich $V(\varepsilon)$ ein klein wenig vom obigen $V(\rho)$, nämlich wodurch?

(b) Wenn wir m auf einem zur x -Achse parallelen geraden Draht bei $z=-a$ reibungsfrei gleiten lassen, so vollführt sie dort kleine Schwingungen mit $\omega^2 = ?$ Dimensionsprobe!