Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 10**	10.01.2007

[Abgabe 17.01 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 29: vier quickies (0.5+0.5+2+1=4 Punkte)

(a) $2x^2 + 7y^2 - 6xy = \vec{r}\,M\vec{r}\ \Rightarrow$ wie lautet die 2×2 Matrix $M = ?$

(b) $A^T = -A \Rightarrow \vec{r}\,A\vec{r} = ?$

(c) Gehen Sie das HT-Rezept für $H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ durch.

(d) Wie lautet also die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = -\kappa \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{r}$ im $\vec{f}$–System?

Aufgabe 30: Harmonische Schwingung in 2D (2.5+1.5=4 Punkte)

Eine (z.B. an zwei Federn hängende) Masse m erfahre die Kraft $\vec{K} = -\frac{1}{2}\kappa\, H\vec{r}$, $H = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Wir vermuten (von HT noch keine Ahnung), daß sich das Problem durch eine Drehung um die z–Achse vereinfacht. Also bilden wir $H' = DHD^T$ und zwar, in 2×2 Matrixschreibweise bleibend, mit $D = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$. Jetzt erst legen wir den Drehwinkel φ so fest, daß H' diagonal wird. Dabei wird D zu $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{+} & \sqrt{-} \\ -\sqrt{-} & \sqrt{+} \end{pmatrix}$, nämlich mit $\sqrt{\pm} := ?$ Welche Diagonalelemente $H'_{11} =: \lambda_1$ und $H'_{22} =: \lambda_2$ ergeben sich? Kommen diese auch per $\det(H - \lambda\,\mathbb{1}) = 0$ heraus? Gelingen Spur– und Determinanten–Probe,?

(b) Um $\boxed{m\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{2}\kappa H\vec{r}\ ,\ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{0}\ ,\ \vec{r}(0) = \vec{a}}$ mit $\vec{a} = a\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ zu lösen, übertragen wir das ganze Problem ins Hauptachsen–System: $\vec{r}\,'(t) = ?$

Aufgabe 31: Exponentialfunktion (2+2=4 Punkte)

(a) Ein Schiff (Masse m), bei $x(0) = 0$ mit $\dot{x}(0) = 0$ startend, erfährt eine konstante Schubkraft $m\,k$ sowie die Wasser–Reibungskraft $-m\,\alpha\,v$. Schreiben Sie den v–ER für dieses 1D Problem auf, und lösen Sie ihn für v und $x(t)$ durch Aufleiten. Mit welcher t–Potenz startet das Schiff ?

(b) Die Anzahl $N(t)$ von Elefanten verändere sich gemäß $\boxed{\dot{N} = \alpha\,N - \beta\,N^2\ ,\ N(0) = N_0}$ wobei α, β positive Konstanten sind. $N(t) = ?$ [*Hinweis:* der ER für die Hilfsfunktion $\eta(t) = 1/N(t)$ könnte viel einfacher zu lösen sein.] Welche ferne Zukunft $N \to ?$ bei $t \to \infty$ hat die Population ?
((Die N–Dgl ensteht, wenn man in $\dot{N} = G \cdot N - S \cdot N$ die Sterberate $S = S_0$ konstant setzt, aber die Geburtenrate G am Bestand z.B. von Futterpflanzen orientiert, welcher seinerseits linear mit der Anzahl der Tiere abnehme: $G = G_0 - \beta \cdot N$, so daß $\alpha = G_0 - S_0$. Ein sehr optimistisches (Elefanten-) Welt-modell.))