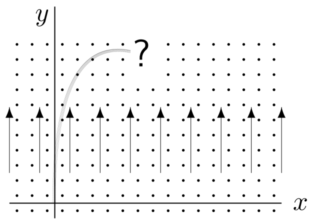
Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 08** 13.12.2006

[Abgabe 20.12 *vor* der Vorlesung]



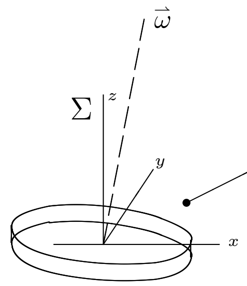
Aufgabe 22: Bewegungsgleichung lösen (3+2=5 Punkte)

Ein geladenes Teilchen (q, m; zu $t = 0$ bei $\vec{r}(0) = \vec{0}$ mit $\vec{v}(0) = \vec{0}$) befindet sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ und einem elektrischen Feld $\vec{E} = (0, E, 0)$ (E und B positiv und konstant).
Hinweis: Kräfte? Standen am Anfang von Kap.3, s. Skript S.18.

(a) Zuerst notieren wir natürlich den ER für $\vec{v}$. Durch Abspalten eines konstanten Vektors $\vec{a}$ kann nun per $\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}$ zu einer neuen unbekannten Vektorfunktion $\vec{u}(t)$ übergegangen werden. Wir bestimmen $\vec{a}$ so, daß ein möglichst einfacher ER für $\vec{u}$ übrig bleibt, nämlich? Lösung $\vec{u}(t) = ?$ — und folglich $\vec{v}(t) = ?$

(b) Durch komponentenweises Aufleiten erhalten wir auch $\vec{r}(t)$. In Parameterdarstellung (Parameter t) ist damit die in der xy–Ebene liegende Bahnkurve des Teilchens bekannt. Sie soll grob qualitativ skizziert werden. Zu welchen Zeiten t_n berührt das Teilchen die x–Achse ?

Aufgabe 23: Drehmatrix: rotierende Raumstation (1+2+2+1=6 Punkte)



Astronauten möchten die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}$ ihrer ringförmigen Station ermitteln. Sie schießen dazu ab Ursprung = Zentrum der Raumstation eine Leuchtkugel ins All und beobachten ihren Ort:

$$\vec{r}\,'(t) = v_0\, t \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(c+s) \\ 1+c-s \\ 1-c+s \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} c = \cos(\omega t) \\ s = \sin(\omega t) \end{matrix} \; .$$

Daß es sich bei ω um den Betrag der gesuchten Winkelgeschwindigkeit handelt, ist klar. Man beginnt jedoch darüber zu streiten, ob die Entfernung der Kugel etwas mit ω zu tun hat.

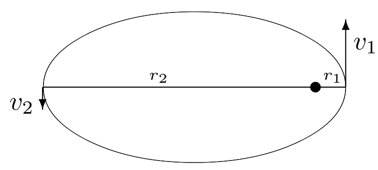
(a) Schlichten Sie den Streit durch Ausrechnen: $|\vec{r}\,'| = ?$

(b) Die Achsen des körperfesten Systems Σ' der Station mögen zu $t = 0$ mit jenen des skizzierten Inertialsystems Σ zusammenfallen. Zu $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ haben wir drei Informationen. [1.] In Σ hat die Leuchtkugel konstante Geschwindigkeit, so daß $\vec{r} = v_0\, t\, \vec{a}$ gilt mit zeitlich konstantem (und dimensionslosem) Vektor $\vec{a}$. [2.] $D = c\,\mathbb{1} + (1-c)\,\vec{e}\circ\vec{e} - s\,\vec{e}\times$ [3.] In der Gleichung $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ ist (nach beidseitigem Streichen von $v_0\, t$) Koeffizientenvergleich möglich: Terme mit c müssen sich kompensieren, ebenso Terme mit s und ebenso Terme ohne c oder s. Welche drei Gleichungen folgen? $\vec{e} = ?$

(c) Achse $\vec{e}$ und Drehwinkel ωt bekannt — welche neun Elemente hat also die Drehmatrix D? Sp(D) = ? Stehen z.B. der zweite und der dritte Spaltenvektor wirklich senkrecht aufeinander?

(d) Nun kann $\vec{a}$ auf zwei Weisen erhalten werden, via $D^T\vec{r}\,'$ oder aus den drei Gleichungen aus Teil (b). Wählen Sie den bequemer erscheinenden Weg. Ist $|\vec{r}| = |\vec{r}\,'|$ erfüllt?

Aufgabe 24: Erhaltungssätze (1+1=2 Punkte)



Zur Bahn eines Kometen(m) ist der kleinste (r_1) und der größte Abstand (r_2) von der Sonne (M) bekannt.

(a) Die Erhaltungssätze liefern uns zwei Gleichungen für die Geschwindigkeiten an diesen zwei extremalen Punkten : $v_1 = ?$ und $v_2 = ?$

(b) Im Diagramm $V_{\text{eff}}(r)$ über r liegen bei r_1, r_2 die Schnittpunkte mit der E–Horizontalen (Skizze!). Aus $V_{\text{eff}}(r_1) = V_{\text{eff}}(r_2)$ erhalten wir den Drehimpuls $L = ?$ des Kometen (als Fkt. von r_1, r_2) und aus diesem zur Kontrolle erneut z.B. v_1.