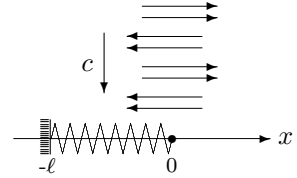


**Aufgabe 19:** Resonanz (3+1+1=5 Punkte)

Ein geladenes Teilchen ( $m, q$ ) ist an einer Feder ( $\kappa, \ell$ ) befestigt und ruht am Ursprung. Ab Zeit  $t = 0$  wird es von einer Lichtwelle (s. Ü14) getroffen, d.h. der Kraft  $K_1 = -mk \sin(\omega t)$  ausgesetzt. 1D Problem.



(a) Eindeutigkeitsrahmen, Ansatz und Lösung  $x(t) = ?$

*Hinweis:* Mit  $\sqrt{\kappa/m} =: \Omega$  und  $\omega$  hat das Problem zwei Frequenzen. Also sind im Ansatz zwei Sorten trigonometrischer Funktionen nötig. Nützliche Abkürzungen:  $s := \sin(\omega t)$ ,  $c := \cos(\omega t)$ ,  $S := \sin(\Omega t)$ ,  $C := \cos(\Omega t)$ .

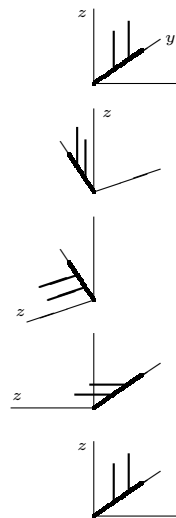
(b) Bei Übung 14 war (wenn man dort  $v_0 = 0$  setzt)  $x(t) = \frac{k}{\omega^2} s - \frac{k}{\omega} t =: x_{\text{ohneFeder}}(t)$  herausgekommen. Wie geht das (a)–Resultat in  $x_{\text{ohneFeder}}(t)$  über?

(c) Auch der Limes  $\Omega \rightarrow \omega$  ist am (a)–Resultat ausführbar (aber *vorsichtig*:  $\Omega = \omega + \varepsilon$  setzen, umformen, und dann erst  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausführen). Das Resultat [ nennen wir es  $x_{=}(t)$  ] zeigt in einem (welchem?) seiner zwei Terme, was eine *Resonanzkatastrophe* ist.

*Hinweis:*  $\sin(\varepsilon t) \approx \varepsilon t + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ ;  $\cos(\varepsilon t) \approx 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

**Aufgabe 20:** Schiffbruch (2.5+1.5=4 Punkte)

Bei schwerem Wetter kommt ein Zweimaster vom Nordkurs ( $y$ -Achse) ab. Er dreht sich um  $\pi/4$  um die Vertikale, kentert dann nach links, zeigt andern tags wieder nach Norden und kann aufgerichtet werden. Zu jeder Position des Schiffes hat der Kapitän die Richtung notiert, in der er den Polarstern sieht. Vor dem Unwetter sah er ihn in Richtung  $\vec{e} = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$ .



(a) Notieren Sie die zu den 4 Drehungen gehörigen Matrizen  $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$  und  $D^{(4)}$  und ermitteln (aus dem jeweils vorangegangenen Einheitsvektor) die Polarstern–Richtungen  $\vec{e}', \vec{e}'', \vec{e}''', \vec{e}''''$ . *Hinweis:*  $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

(b) Welches Produkt aus  $D$ 's führt von der Startposition direkt zur übernächsten Position, bzw. zur überübernächsten bzw. zur letzten? Und welche Drehmatrizen kommen dabei jeweils heraus?

**Aufgabe 21:** Dreh-quickies (1+2+1=4 Punkte)

(a) Wenn allgemein  $D = c \mathbb{I} + (1 - c) \vec{e} \circ \vec{e} - s \vec{e} \times$  gilt, dann ist sicherlich  $D^T = ?$  Wie wird in dieser Sprache  $D D^T$  zur Einheitsmatrix?

(b) Kann es sich bei  $D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$  um eine Drehmatrix handeln (warum?)?

Geben Sie die Drehachse  $\vec{e}$  und die Determinante von  $D$  an.

(c) Verschaffen Sie sich zur Matrix  $D$  aus (b) den Kosinus ( $=: c$ ) und den Sinus ( $=: s$ ) des Drehwinkels und bilden  $c^2 + s^2$  zur Kontrolle.