

[Beginn 09:30, Abgabe 11:30 ; 30 Punkte, bei ≥ 10 garantiert bestanden ; Name+Matrikelnr auf jedes Blatt]

Aufgabe 1: Dreieck (2 Punkte)

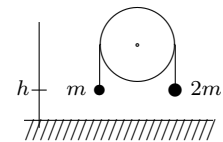
Der Winkel $\pi/3$ ist ein ganz besonderer Winkel: er drittelt die Dreiecks-Winkelsumme. Wie läßt sich also $\cos(\pi/3) = 1/2$ herleiten? Folglich ist $\sin(\pi/3) = ?$

Aufgabe 2: Kreis (2 Punkte)

Kreisbewegung in der x - y -Ebene, Start bei $\vec{r}(0) = (R, R)$, konstante Winkelgeschwindigkeit ω , im Uhrzeigersinn um den Punkt $(R, 0)$. Geben Sie $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$ und $\ddot{\vec{r}}(t)$ an.

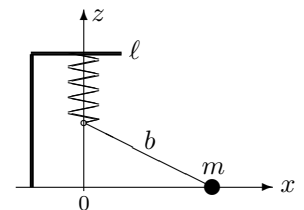
Aufgabe 3: Bewegungsgleichung im Erdgravitationsfeld (3 Punkte)

„Atwoods Fallmaschine“: Rolle und Faden masselos, keine Reibung. Welche Bewegungsgleichung gilt? Nach welcher Zeit t_1 (bei Start aus Ruhe und Höhe h beider punktförmiger Massen) trifft der $2m$ -Klotz den Boden? ($h \ll R_{\text{Erde}}$)



Aufgabe 4: Energieerhaltung (3 Punkte)

Eine in Höhe $h = \ell$ befestigte Feder (κ, ℓ) schiebt eine vertikal bewegliche Öse (z). Eine dort beginnende Stange (Länge b , masselos) schiebt m (nur auf x -Achse beweglich). Wie hängt die Energie E des Systems von v und x ab? m habe am Ursprung $v_0 = 0$. Was ist ihre Geschwindigkeit v bei $x = b$?



Aufgabe 5: Potenzansätze (2+2=4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden ER's durch Einführung neuer Funktionen:

- (a) $\dot{v} = -\lambda v^2, v(0) = v_0$ Ansatz $v(t) = 1/\eta(t)$, ER für η , lösen, $v(t)$ angeben.
 (b) $\dot{v} = -\lambda v^n, v(0) = v_0$ ($n \neq 1$); Ansatz $v(t) = [\eta(t)]^a$, a so bestimmen daß ER einfach wird, ER für η , lösen, $v(t)$ angeben. [check: führt $n = 2$ zur (a)-Lsg?]

Aufgabe 6: Differentialgleichungen (1+2=3 Punkte)

Starke Reibung kann ein Teilchen nach endlicher Zeit t_1 stoppen. Zwei 1D Beispiele:

- (a) $\dot{v} = -\alpha, v(0) = v_0$ $v(t) = ?$ $t_1 = ?$ (b) $\dot{v} = -\beta/v, v(0) = v_0$ $v(t) = ?$ $t_1 = ?$

Aufgabe 7: Potential (2 Punkte)

Auf einem masselosen Tablett, elastisch gelagert (κ_3), ist an einer horizontalen Feder (κ_1) eine Masse m reibungsfrei in x -Richtung beweglich. 2D Problem. Zu geeigneter Ursprung-Wahl (dem Punkt, an dem beide Federn entspannt sind) hat das Potential die einfache Gestalt $V(x, z) = ?$ Auf m wirkt dann die Kraft $\vec{K} = ?$



Aufgabe 8: Hauptachsen (HA) (3+1=4 Punkte)

- (a) Gehen Sie zu $H = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ das HA-Transformations-Rezept durch. $D = ?$

[Notation wie üblich: $H' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = D H D^T$]

- (b) Wie lautet $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 H \vec{r} + \omega^2 \vec{c}$ mit $\vec{c} = \frac{c}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im HA-System? [$\vec{r}' \equiv D \vec{r}$, $\ddot{\vec{r}}' = ?$]

Aufgabe 9: Potenzreihen-Entwicklungen (1+1+1=3 Punkte)

- (a) $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = ..?.. + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ (b) $\ln\left(\frac{1}{\cos(\varepsilon)}\right) = ..?.. + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$ (c) $\sinh\left(\sqrt{\varepsilon} \sin(\varepsilon)\right) = ..?.. + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$

Aufgabe 10: Störungsrechnung (3+1=4 Punkte)

Jemand findet die Lösung des Wachstumsproblems $\dot{N} = \alpha N - \beta N^2, N(0) = N_0$ nicht und will sie wenigstens linear im Koeffizienten β ergründen.

- (a) $N(t) = N^{(0)}(t) + N^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\beta^2) = ?$ (Hinweis: $N^{(1)}(t) = e^{\alpha t} u(t)$ könnte nützlich sein.)
 (b) Hat sich damit wirklich der Reihenanfang der Lösung $N(t) = \frac{N_0 \alpha}{\beta N_0 + (\alpha - \beta N_0) e^{-\alpha t}}$ ergeben?

Viel Erfolg!