Einf. i. d. Meth. d. theor. Phys. I → EMTP

VS, E6-118 (Mi 16-17)

www.physik.uni-bielefeld.de/~gorbs/emtp

Gruß

warum Physik? – Sterne, Natur, etc; staunen, fragen warum?, Sprache entwickeln

Orga Vorl Mi: 14.15 – 15.00, 15.10 – 15.55 (HS)
in Pause: Ü-Blatt holen
Ü-Liste eintragen (nur heute)
vor Vorl: Ü-Lsn in Kasten
Regeln: 50% Ü-Pkte + akt. Mitarbeit ⇒ Ü-Schein
Ü-Schein + (eine) Klausur best. ⇒ Schein
↳ 12.2.07, 26.3.07

Literatur
(*) Scholz: Physik mit Bleistift, Harri Deutsch
6. Aufl. Apr 2006, 388 S., 25€
Fischer/Kaul: Mathematik für Physiker Bd 1, Teubner
5. Aufl. Mrz 2005, 584 S., 38€
Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Teubner
9. Aufl. Jan 2005, 366 S., 30€
Lang/Pucker: Mathematische Methoden der Physik, Spektrum Akad. Verlag
2. Aufl. Aug 2005, 713 S., 40€

Inhalt
Vektoren, Kinematik, Newton, Tensoren,
Funktionen, Integrale, Bewegungsgleichungen

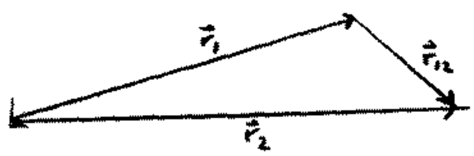
1. Vektoren

Richtungs-Angaben. Pfeile!

Bezugspunkt vereinbaren → <u>Ursprung</u>

<u>Ortsvektor</u> $\vec r$: Pfeil Ursprung → Physik

Verschiebungsvektor: Pfeil Punkt → Punkt



Einheiten? Bsp: $\vec v$ in m/s ? ⇔ Übersetzungsregel (cm auf Papier ⇔ m/s)

Länge des Pfeils := <u>Betrag</u>. $|\vec r| = r$, $|\vec v| = v$, $|\vec K| = K$

⇒ Pfeil hat Richtung, Betrag, Anfangspunkt

Bsp: Ball hat bei $\vec r$ die Geschw. $\vec v$

Bsp: Meeresströmung $\vec v(\vec r)$

Bsp: Gravitations-<u>Feld</u> der Erde

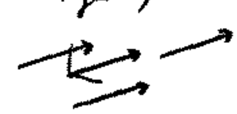
(später: Kap. 4)

(vorläufige) Def: <u>Vektor</u>

> Vektoren sind Pfeile bzgl. Betrag und Richtung, die mit einer Zahl zu multiplizieren und die zu addieren physikalisch sinnvoll ist.

(≠ Mathematik-Vektor ... Physik-Pfeil real, Verhalten bei Drehungen)

1. Def-Zeile: Vektor ≙ Gesamtheit der Pfeile mit ..
   kann Repräsentanten wählen



2. Def-Zeile: 1,7 · ↗ = ↗ , −1 · ↗ = ↙ etc anschaulich klar
   insbes: <u>Einheitsvektor</u> $\frac{1}{a}\cdot\vec a = \vec e$, $|\vec e| = 1$; $\vec a = a\vec e$

3. Def-Zeile: (s. Bild oben) $\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2$

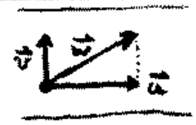
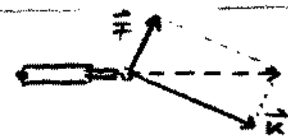
geht mit Vektoren gleicher Dimension (Übersetzungsregel)

Reihenfolge egal: $\nearrow + \searrow = \Longleftrightarrow = \searrow + \nearrow$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Nullvektor

"physikalisch sinnvoll"? → verstehe am Bsp.

Bsp	Vektor?
Geschwindigkeiten. Mult. ✓ Add.? → Fluss  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$	JA
Kräfte. → Federwaage 	JA
Drehungen. Rechte-Hand-Regel: Daumen ≙ Drehachse, Finger ≙ Drehrichtung; Betrag ≙ Winkel. Test: $\uparrow + \leftarrow \overset{?}{\neq} \leftarrow + \uparrow$	NEIN

bisher: Vektor ≙ Pfeil. Addition ≙ aneinander Basteln.

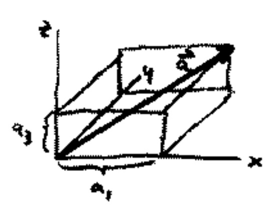
Vereinfachung?! (faul...)

Vektor $\vec{a}$ gegeben. Wähle Repräsentant ab Ursprung.

Messe Höhe der Spitze → a_3.

⇒ Komponenten

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$



Systematik: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$

$\vec{r} = (x, y, z)$ ← ausnahmsweise

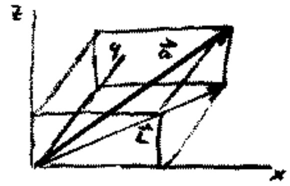
alle 3 Komp. haben gleiche Dimension, $[a_1] = [a_2] = [a_3] = [a] = [\vec{a}]$

Bsp: $[v_3] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = m/s$, $[y] = \text{Länge} = m$

$\vec{v} = (1\,m/s,\ 0,\ 2\,m/s) = (1, 0, 2)\,m/s$

obige Vektor-Eigenschaften in Komponenten-Sprache?

Betrag: $\boxed{|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$



wegen Pythagoras

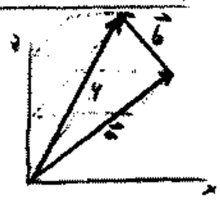
$a^2 = a_3^2 + L^2$, $L^2 = a_1^2 + a_2^2$

Mult.: $\boxed{c\vec{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)}$

anschaulich klar: Schatten-Verdopplung! (c=2)

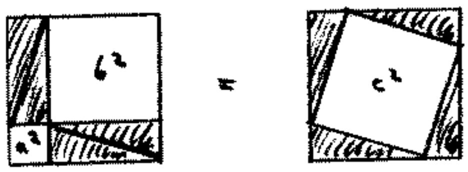
Add.: $\boxed{\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)}$

anschaulich
(für eine Komp.)
$z \hat{=} a_3 + b_3$ ✓



Pythagoras? einfach! geometr. Beweis:

(mehr Beweise: → s. Übg.)



Vektoren $\vec{a}$. $(=\vec{a})$

bisher: $|\vec{a}|$, $c\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$

heute: weitere Verknüpfungen von 2 Vektoren

$\hookrightarrow \vec{a}+\vec{b}$, $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}$, $\underline{\vec{a}\times\vec{b}}$, $\vec{a}\circ\vec{b}$, $a \wedge b$

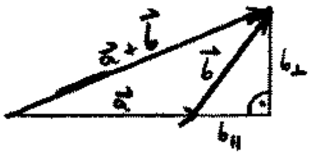
Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$

Motivation

(M1)  $\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)

 $\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 2\cdot \text{Rest} =: 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$

definiert die rechte Seite der Gleichung



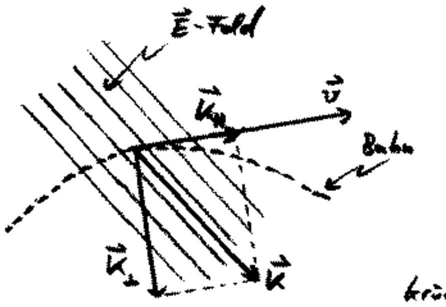
haben $\vec{b}$ zusammengesetzt

$\vec{b} = \vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel$ parallel zu $\vec{a}$

"Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$"

also: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(a+b_\parallel)^2 + b_\perp^2}_{\text{Pythagoras}} - a^2 - b_\perp^2 - b_\parallel^2\Big] = a b_\parallel$

(M2)



geladenes Teilchen (Ladung q) im elektrischen Feld $\vec{E}$.

$\vec{K} = q\vec{E}$

$= \vec{K}_\perp + \vec{K}_\parallel$

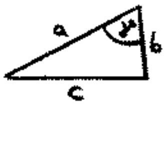
krümmt Bahn; parallel zu $\vec{v}$; beschleunigt

also macht auch hier eine Definition $K_\parallel =: \frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{K}$ Sinn.

Definition

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} := a b_\parallel = a_\parallel b = ab\cos(\varphi)}$$

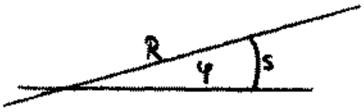
$\hookrightarrow$ Gleichberechtigung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ $\hookrightarrow$ Definiert $\cos(\varphi)$

((NB 

"Kosinussatz" $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi)$

folgt aus Vektorrechnung: $(\vec{a}-\vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$))

Winkel ?



Maß der "Öffnung" zweier Geraden

offensichtlich ist R proportional zu s.

Definition $\boxed{\text{Winkel } \varphi := s/R}$ ((dimensionslos : Länge/Länge))

rechter Winkel? 90°? $\pi/2$!

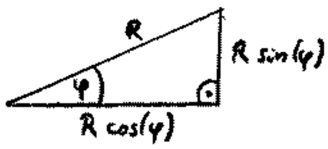
nachmessen:  , $s/R = 3.14159\ldots =: \pi$

Raumwinkel ?

Maß für "Öffnung" eines Kegels, mit Stück Kugelfläche S als Abschluß. $2\cdot R \to 4\cdot S$, also:

Def $\boxed{\text{Raumwinkel } \Omega := S/R^2}$ ((dimensionslos))

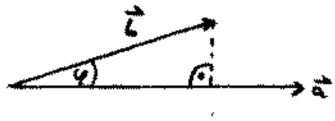
Sinus? Kosinus?



$\cos(\varphi) := \dfrac{\text{Kantenlänge am Winkel } \varphi}{R}$

$\sin(\varphi) := \dfrac{\text{Kantenlänge gegenüber } \varphi}{R}$

$\Rightarrow$ Pythagoras: $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$

verstehen jetzt auch das letzte Gleichheitszeichen der Skalarprodukt-Def:  $b_{\parallel} = b\cos(\varphi)$

Formelsammlung zum Skalarprodukt

"genau dann, wenn"

$\vec{a}^2 := \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$, $|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}^2}$, $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab$

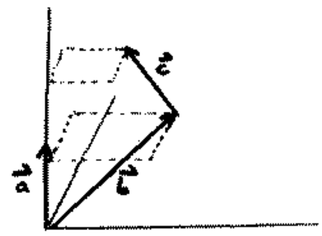
$|\vec{a}+\vec{b}| \leq a+b$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq ab$ (Schwarz'sche Ungleichung)

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

(*) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

$r_{12} = r_{21} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}$



alles anschaulich klar, z.B. Skizze →

liefert $(\vec{b}+\vec{c})_{\parallel} = b_{\parallel} + c_{\parallel}$. Multiplizieren mit a $\overset{\text{es folgt}}{\Rightarrow}$ (*)

Vereinbarung: $\vec a \cdot \vec b = \vec a \vec b$

brauche manchmal Klammern: $\vec a (\vec b \vec c) \neq (\vec a \vec b) \vec c$!

nie durch einen Vektor teilen. "$\cancel{\frac{1}{\vec a}}$" nicht def.

in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl, Vektor = Vektor

$\vec a \cdot \vec b$ in Komponenten

brauchen Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen:

$\vec e_1 = (1,0,0)$; $\vec e_2 = (0,1,0)$; $\vec e_3 = (0,0,1)$

dann ist $\vec a = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3$

und
$$
\begin{aligned}
\vec a \cdot \vec b &= (a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3) \cdot (b_1 \vec e_1 + b_2 \vec e_2 + b_3 \vec e_3) \\
&= a_1 b_1\, \vec e_1 \cdot \vec e_1 + a_2 b_1\, \vec e_2 \cdot \vec e_1 + a_3 b_1\, \vec e_3 \cdot \vec e_1 \\
&\quad + a_1 b_2\, \vec e_1 \cdot \vec e_2 + a_2 b_2\, \vec e_2 \cdot \vec e_2 + a_3 b_2\, \vec e_3 \cdot \vec e_2 \\
&\quad + a_1 b_3\, \vec e_1 \cdot \vec e_3 + a_2 b_3\, \vec e_2 \cdot \vec e_3 + a_3 b_3\, \vec e_3 \cdot \vec e_3
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\vec a \cdot \vec b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Einstein'sche Summenkonvention

$$\vec a \cdot \vec b = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j =: a_j b_j$$

falls zwei gleiche Indizes vorkommen → summieren

obige Herleitung nun kurz: $\vec a \cdot \vec b = a_j \vec e_j \cdot b_k \vec e_k = a_j b_k \delta_{jk} = a_j b_j$

mit Kronecker-Symbol $\delta_{jk} := \vec e_j \cdot \vec e_k = \begin{cases} 1 & \text{für } j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Anwendungs-Beispiele:

$a_j a_j = a^2$

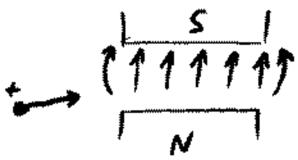
$c_k a_j a_l b_k \delta_{jl} = a^2 (\vec c \cdot \vec b)$

$\delta_{jl} \delta_{lk} = \delta_{jk}$, $\delta_{jl} \delta_{lm} \delta_{mn} \delta_{nk} = \delta_{jk}$

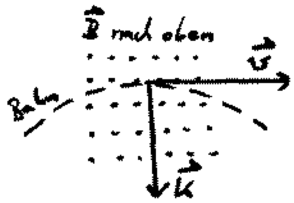
$\delta_{jj} = 3$, $\delta_{jl} \delta_{lj} \delta_{mn} \delta_{nm} = 9$

Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

Motivation



el. geladenes Teilchen (Ladung q)
fliegt durch Magnetfeld $\vec{B}$
Experiment $\Rightarrow$ $\vec{K} \perp \vec{v}$, $\vec{K} \perp \vec{B}$
und $\vec{K}$ proportional q und $v B_\perp = v_\perp B$ ← Komp. senkrecht zu $\vec{v}$



$\Rightarrow$ erfinde "Kreuzprodukt" mit den genannten Eigenschaften

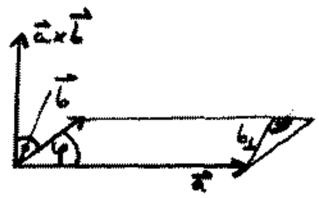
$$\vec{K} =: q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

(Anwendung? DESY, CERN, .. !)

Definition

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} \text{Fläche des von} \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ aufgespannten} \\ \text{Parallelogramms} \end{pmatrix} \cdot \vec{e} = -\vec{b} \times \vec{a} = \vec{e}\, a b \sin(\varphi)}$$

wobei $\vec{e}$ Einheitsvektor $\perp \vec{a}$ und $\perp \vec{b}$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ bilden ein Rechtssystem



Formelsammlung zum Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \quad , \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = a b_\perp = a_\perp b$$

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$a \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

alles anschaulich klar ; s. Ü.

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})}$$

(Beweis s. Ü.)

(kommt sehr häufig vor)

<u>Zerlegung</u> $\vec a = \vec a_\perp + \vec a_\parallel$ oft nützlich

muß angeben, in Bezug auf welchen Vektor $\parallel$ und $\perp$ gilt:

z.B. in Bezug auf Einheitsvektor $\vec e$

$\Rightarrow \quad \vec a_\parallel = (\vec a \vec e)\vec e$

$\vec a_\perp = \vec a - \vec a_\parallel = \vec a(\vec e \vec e) - \vec e(\vec a \vec e) \overset{BAC-CAB}{=} \vec e \times (\vec a \times \vec e)$

<u>$\vec a \times \vec b$ in Komponenten</u>

$\vec a = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3 \quad , \quad \vec b = b_1 \vec e_1 + b_2 \vec e_2 + b_3 \vec e_3$

$\vec e_1 \times \vec e_2 = \vec e_3 \quad , \quad \vec e_2 \times \vec e_3 = \vec e_1 \quad , \quad \vec e_3 \times \vec e_1 = \vec e_2 \quad ; \quad \vec e_1 \times \vec e_1 = 0$ etc.

$\Rightarrow \quad (\vec a \times \vec b)_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec a \times \vec b = (a_2 b_3 - a_3 b_2 \, , \, a_3 b_1 - a_1 b_3 \, , \, a_1 b_2 - a_2 b_1)}$

Indizes: j-te Komponente ergibt sich durch $\cdot \vec e_j$ auf beiden Seiten

$$(\vec a \times \vec b)_j = a_k b_l \, \vec e_j \cdot (\vec e_k \times \vec e_l) =: \varepsilon_{jkl} \, a_k b_l$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_{jkl} := \vec e_j \cdot (\vec e_k \times \vec e_l) = \begin{cases} 0 & \text{wenn 2 Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{wenn } j,k,l \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } j,k,l \text{ antizyklisch} \end{cases}$$

"total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe"

((zyklisch: 1,2,3 ; 2,3,1 ; 3,1,2

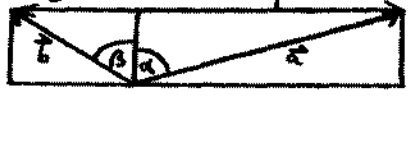
anti 〃 : 1,3,2 ; 2,1,3 ; 3,2,1))

<u>Trigonomie ?</u>

Sinussatz, Kosinussatz etc

sind einfache Folgerungen der Vektorrechnung. (s. S.5)

weiteres Bsp:



Fläche großes Rechteck $= |\vec a \times \vec b| = ab \sin(\alpha+\beta)$

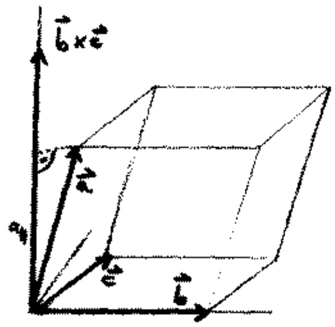
$=$ linkes + rechtes Rechteck

$= b\sin(\beta)\ a\cos(\alpha) + a\sin(\alpha)\ b\cos(\beta)$

$\Rightarrow \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

noch ein doppeltes Produkt (neben $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$):

Spatprodukt



$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_\parallel\, |\vec{b}\times\vec{c}|$$

$$= \begin{pmatrix}\text{Volumen des Parallelepipeds}\\ \text{mit Kanten } a,b,c\end{pmatrix}\cdot\frac{a_\parallel}{|a_\parallel|}$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

in Komponenten

$$\begin{aligned}= \; & a_1\cdot b_2c_3 - a_1 b_3c_2\\ & + a_2\cdot b_3c_1 - a_2 b_1c_3\\ & + a_3\cdot b_1c_2 - a_3 b_2c_1\end{aligned}$$

$$\left(= \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k \right)$$

ordnet 9 Zahlen eine einzige Zahl zu

≙ "Determinante"

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

"Matrix"; s. Kap. 4

Sarrus' Regel
(nur 3x3 und 2x2)

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = (\delta_{jk})$$

Vektorgleichungen

schränken $\vec{r}$'s so ein, daß Lsn geometr. Objekt bilden ...

Bsp. $\vec{r}\cdot\vec{e}_3 = 0$. hat ($\infty$ viele) Lsn: $\vec{r} = (x,y,0)$

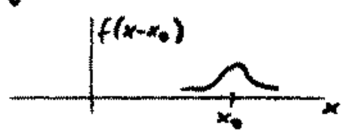
⇒ ist Gleichung der xy-Ebene

$\vec{r}\cdot\vec{e} = 0$. Ebene durch Ursprung $\perp \vec{e}$

$|\vec{r}| = R$. Kugel mit Radius R

$|\vec{r}-\vec{r}_0| = R$. 〃 , Mitte bei $\vec{r}_0$

↳ Translation: Ursprung-bezogene ($\vec{r}$'s enthaltende) Physik wird $\vec{r}_0$-bezogen durch $\vec{r}\to\vec{r}-\vec{r}_0$



weiteres Bsp zur Translation: Grav.-Kraft

$$\vec{K} = -\frac{\gamma m M}{r^2}\,\vec{e}_r$$

$\Rightarrow$ Stern (M) bei $\vec{r}_0$ hat $\vec{K} = -\dfrac{\gamma m M}{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}\,\dfrac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

LK (Linearkombination)

c_1 Objekt$_1$ + c_2 Objekt$_2$ + .. ist LK aus Obj.

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_3\vec{e}_3$ ist LK aus $\vec{e}$'s

linear in = hoch eins von

$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c}$ ist LK aus $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

VONS (vollst. Orthonormalsystem)

3 Vektoren $\vec{f}_j$ bilden VONS (Dreibein)
$\Leftrightarrow$ $\vec{f}_j\cdot\vec{f}_k = \delta_{jk}$ und $\vec{f}_1\cdot(\vec{f}_2\times\vec{f}_3) = +1$

$\hookrightarrow$ d.h. Rechtssystem.

"vollständig", weil jeder Vektor nach $\vec{f}_j$ entwickelbar:

$$\vec{a} = a_1'\vec{f}_1 + a_2'\vec{f}_2 + a_3'\vec{f}_3$$

$\vec{a}$ bekannt, erhalte $a_1' = \vec{f}_1\cdot\vec{a}$ etc.

$\vec{a},\vec{b}$ "linear unabhängig" $\Leftrightarrow$ aus $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{0}$ folgt $c_1 = c_2 = 0$

3 linear unabh. V. spannen den 3D V.raum auf.

— Ende Kap. 1 —

Vokabeln
haben Sprache gelernt (Vektoren, Operatoren)
bisher alles statisch (unbewegt)
$\Rightarrow$ jetzt kommt Schwung in die Physik: Kap. 2

2. Kinematik

Kino, Bilderfolge, bewegte Pfeile

$\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ = Vektorfunktion

Zeit t, z.B. $\vec{r}(t)$, $\vec{K}(t)$, $\vec{v}(t)$

((Funktionen: Kap. 5. hier nur einfache, x, x^2, $\frac{x}{1+x^2}$, $\cos(x)$, $\sin(x)$))

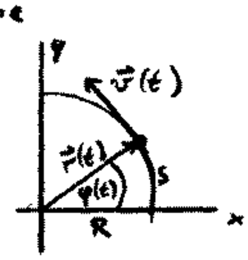
Raumkurven kennenlernen über Bsp.

(A) Bewegung mit $\vec{v} = \overrightarrow{\text{const}_t}$.
$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ bekannt.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t = (x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t, \ldots)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Parameterdarstellung einer Geraden.
Parameter t läuft von $-\infty$ nach ∞

(B) Kreisbewegung mit $v = \text{const}_t$ in xy Ebene
ab $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$



$$s(t) = vt$$
$$\varphi(t) = s(t)/R = \frac{v}{R}t =: \omega t \quad \text{"Kreisfrequenz"}$$
$$\left(\omega = \frac{v}{R}, \quad [\omega] = 1/\text{Zeit}\right)$$

$$\vec{r}(t) = R\,(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$$

Umlaufzeit = Periode = T

zu $t = T$ wird $\varphi = 2\pi = \omega T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

((Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$. "Frequenz" $= \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ bei uns selten))

$\vec{v}(t)$ rein geometrisch: kenne v, suche $\vec{e}_v$

$$\vec{v}(t) = v\vec{e}_v = v\cdot\left(\vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}(t)}{R}\right) = v\,(0,0,1)\times(c,s,0)$$
$$= R\omega\,(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)$$

(C) Schraubenlinie $\quad \vec r(t) = \big(R\cos(\omega t),\ R\sin(\omega t),\ v_3 t\big)$

(D) Holzschraube $\quad \vec r(t) = \big(R(t)\cos(\omega t),\ R(t)\sin(\omega t),\ v_3 t\big)$

 $\}\ v_3 t_0$ $\quad$ mit $R(t) = R\left(1 - t/t_0\right)$

$0 < t < t_0$

(E) Ellipse  $\quad \vec r(t) = \big(a\cos(\omega t),\ b\sin(\omega t),\ 0\big)$

(F)  , $\omega t =: \tau$ $\quad \vec r = \big(2R\cos(\tau),\ R\sin(\underline{\underline{2}}\tau),\ 0\big)$

(G) spielen; e.g. 𝄞

<u>Winkelgeschwindigkeit</u>

Kreis (s. (B) oben) $\quad \vec v_{Kreis} = R\omega\,(\vec e_3 \times \vec e_r) = \underbrace{(\omega \vec e_3)}_{=:\,\vec\omega} \times \vec r$

$\varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$

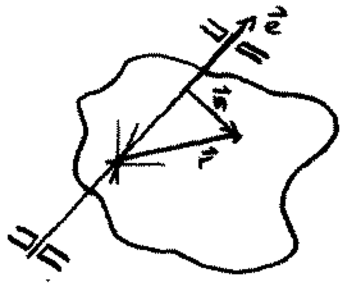
cave $\omega \neq w$ (omega, w)

allgemein (es muß nur eine momentane Achse $\vec e$ geben)

$\vec\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec e(t)$

⟪ Erde,  , $\omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$, wohin zeigt $\vec\omega$? ⟫

starrer Körper (z.B. gelagert), Ursprung auf Achse, $\vec v = ?$ eines Punktes bei $\vec r$:



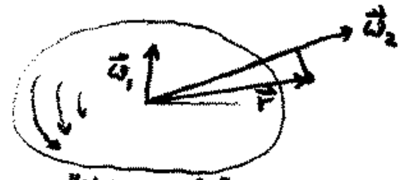
$\vec v = v\cdot\left(\vec e \times \frac{\vec r_\perp}{r_\perp}\right) = \underbrace{\frac{v}{r_\perp}}_{\omega}(\vec e \times \underbrace{\vec r_\perp}_{\vec r})$

$\boxed{\vec v = \vec\omega \times \vec r}$

Ist $\vec\omega$ Vektor? (→ Kap. 1: <u>endl.</u> Drehungen <u>nicht</u>!)

$\lambda\cdot\vec\omega$: kein Problem

$\vec\omega_1 + \vec\omega_2 \stackrel{?}{=} \vec\omega_{ges.}$ (bei Achsen-Kreuzung im Ursprung) JA:



"Karussell"

ohne Motor : $\vec u = \vec\omega_1 \times \vec r$

ohne Kar. : $\vec v = \vec\omega_2 \times \vec r$

$\vec u + \vec v = (\vec\omega_1 + \vec\omega_2)\times\vec r$

$\vec w = \vec\omega_{ges.} \times \vec r \quad \forall \vec r$ "für alle"

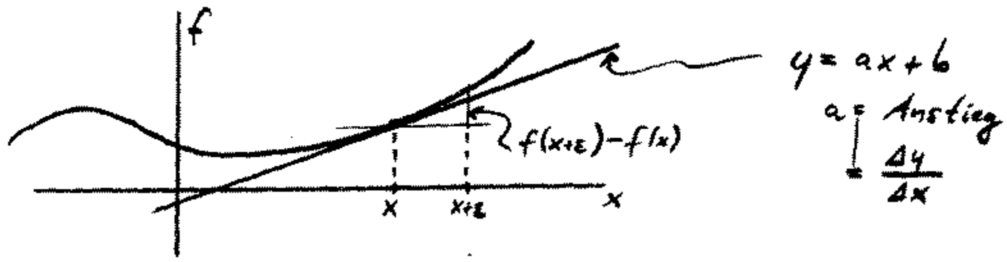
Ein (irgendwie durch den Raum eiernder) starrer Körper hat stets ein $\vec{\omega}$, denn 3 Punkte legen seine Position fest, und es ist

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\times(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} \qquad \text{wegen bac-cab.}$$

$$\Big(\Big(\;\overrightarrow{\text{Zähler}} \overset{!}{=} (\vec{v}_1-\vec{v}_3)\times\big(\vec{\omega}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\big) = \vec{\omega}\cdot\underbrace{\big((\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\big)}_{\overset{!}{=}\,\text{Nenner}} - (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\underbrace{\big((\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot\vec{\omega}\big)}_{\overset{!}{=}\,0} \;\Big)\Big)$$

<u>Differenzieren</u> (Ableitung bilden)

einfach. Sie können es schon: malen. Tangente, Anstieg.



Def. $\boxed{\text{Ableitung von } f(x) \text{ bei } x = f'(x) := \text{Anstieg der Kurve bei } x}$

per Rechnung:

$$\boxed{f'(x) \overset{!}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f(x)}$$

„Differentialquotient"

„Limes" ≙ Grenzwert

vorstellen? Wie immer mit <u>Bsp</u> (bitte $\lim_{\varepsilon\to 0}$ hinzudenken)

(A) $$\partial_x x^3 = \frac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\cancel{x^3} + 3x^2\varepsilon + \underbrace{3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3}_{\overset{!}{=}\,\mathcal{O}(\varepsilon^2)} - \cancel{x^3}\Big) = 3x^2$$

nützliche Notation: $\mathcal{O}(\eta)$:= etwas $\sim \eta$ bei $\eta \to 0$ gegen Null gehendes

(B) $$\partial_x \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \frac{\cancel{x} + \varepsilon - \cancel{x}}{\varepsilon\,(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(C) $$\partial_x \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x+\varepsilon} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{x-(x+\varepsilon)}{(x+\varepsilon)\,x} = -\frac{1}{x^2}$$

(D) $\partial_x\, x^{n/m} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\underbrace{(x+\varepsilon)^{n/m}}_{=:\, x^{n/m} + a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} - x^{n/m} \Big)$

$x^{n/m} + a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $(x+\varepsilon)^n = \left(x^{n/m} + a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)^m$,

$x^n + n x^{n-1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = x^n + m\, x^{\frac{n}{m}(m-1)} a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$\Rightarrow a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

$= a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

bisher: $n, m = 1, 2, 3, \dots$; genauso für $n = -1, -2, \dots$

kann jede reelle Zahl λ bel. genau durch $\frac{n}{m}$ approximieren

$\Rightarrow$ allgemein $\partial_x\, x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}$

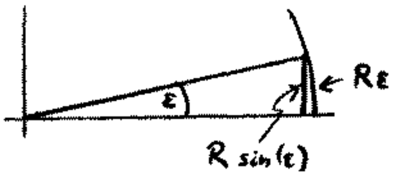
(E) $\partial_x \sin(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)\right)$

s. Kap. 1 Skript S. 9

$= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\sin(x) \underbrace{\cos(\varepsilon)}_{(**)\ =\ 1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \cos(x) \underbrace{\sin(\varepsilon)}_{(*)\ =\ \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)} - \sin(x) \Big)$

$= \cos(x)$

(*)



(**) $\cos(\varepsilon) = \sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon)}$

$\rightarrow \sqrt{1 - \varepsilon^2 + \dots} = 1 - c\varepsilon^2 + \dots$

quadr.: $1 - \varepsilon^2 + \dots = 1 - 2c\varepsilon^2 + \dots$

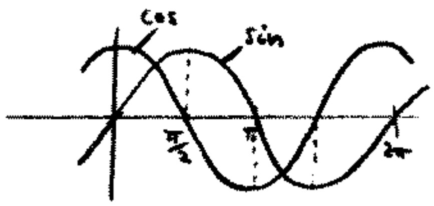
$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

(F) $\partial_x \cos(x) = \partial_x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\partial_x \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$

(***) $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



(G) $\partial_x\, g \cdot h = g' h + h' g$ "Produktregel"

(H) $\partial_x f(g(x)) = f'(g) \cdot g'$ "Kettenregel"

(I) $\partial_x f(g, h) = f'^g g' + f'^h h'$

aus (I) folgen (H) und (G). (I)-Herleitung genügt:

$\partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}\Big[f\big(\underbrace{g(x+\varepsilon)}_{=\, g(x) + \varepsilon g'(x)}, h(x+\varepsilon)\big) - f(g(x), h(x)) \Big]$

$= \frac{1}{\varepsilon}\left[f(g+\varepsilon g', h+\varepsilon h') - f(g, h+\varepsilon h') + f(g, h+\varepsilon h') - f(g,h) \right]$

$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\varepsilon g' \cdot f'^g(g, h+\varepsilon h') + \varepsilon h' f'^h(g,h) \right] = (I)$

Bsp (I) gilt natürlich entsprechend auch für 3 Funktionen.

schöne Anwendung: "Gradient"

Maikäfer fliegt mit $\vec{r}(t)$ durch Abendluft mit Temp. $T(\vec{r})$

Welche Temp.-Änderung pro Zeit hat er auszuhalten?

$$\partial_t T\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \dot{x}\,\partial_x T + \dot{y}\,\partial_y T + \dot{z}\,\partial_z T \qquad (\partial_t z =: \dot{z})$$

sieht aus wie Skalarprod.

$$= \dot{\vec{r}} \cdot \underbrace{(\partial_x T, \partial_y T, \partial_z T)}_{=(\partial_x, \partial_y, \partial_z)\,T \;=:\; \text{grad}\, T \;=:\; \vec{\nabla} T}$$

$$= \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} T \quad , \quad \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

differenzieren einer Vektorfunktion?

simpel: $\quad \partial_t \vec{a}(t) := \dfrac{d\vec{a}}{dt} = (\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3)$

((wie bei $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$))

übrigens ist $\overrightarrow{\text{Beschleunigung}} := \partial_t \vec{v}(t) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$

Gefahr: $\quad |\dot{\vec{r}}| = v \neq \dot{r} = \partial_t |\vec{r}|$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2\sqrt{\cdots}}\,(2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}) = \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\,\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{v} = \vec{e}_r \cdot \vec{v} = v_{\parallel} \neq v$$

((z.B. Kreisbewegung von S. 12: $|\dot{\vec{r}}| = R\omega$, $\dot{r} = 0$))

Rechenregeln (mit (I) leicht zu verstehen)

$$\partial_t \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} \\ \lambda \vec{a} \\ \vec{a}\,\vec{b} \\ \vec{a} \times \vec{b} \end{cases} = \begin{cases} \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}} \\ \dot{\lambda}\vec{a} + \lambda\dot{\vec{a}} \\ \dot{\vec{a}}\,\vec{b} + \vec{a}\,\dot{\vec{b}} \\ \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}} \end{cases}$$

Linearer Operator

Op Element = anderes Element ; $\lambda \nearrow = \nearrow$; $\vec{a}\times \vec{m} = \vec{m}'$; $\partial_x f = f'(x)$

A ist ein linearer Op. $\Leftrightarrow A(\alpha f + \beta g) = \alpha A f + \beta A g$

$Af := \frac{1}{f}$ ist <u>nicht</u> lin., denn $\dfrac{1}{\alpha f + \beta g} \neq \alpha \dfrac{1}{f} + \beta \dfrac{1}{g}$

$A^2 := AA$, $\partial_x^3 f = f'''$, etc.

3. Newton 1643–1727

bisher: Kap 1, Vektoren, Vokabeln gelernt, statisches Weltbild ("Photo")
Kap 2, Kinematik, $\vec{r}(t)$ auf vorgegebenen Kurven, "Kino"

in der Natur: $\vec{r}(t)$ weiß von alleine, wie er sich zu verändern hat!
→ Zukunft vorhersagen? Wahrsagen? Physik!

Physik: Stück Natur verstehen = kann ausrechnen, was sie tun wird.
↪ wir sind gut vorbereitet: $\vec{r}(t)$, ∂_t, ...

Experiment(e) → Prinzipien der Natur – Mathematik
↓
Vorhersage aller Experimente

} Theor. Physik

in diesem Kap.: <u>Newton'sche Mechanik eines Massenpunktes</u>

Es gibt Teilchen. T. wechselwirken

stark	em	schwach	Gravi
10^{-15} m	$\sim r^{-2}$	10^{-18} m	$\sim r^{-2}$
1	$1/137$	10^{-5}	10^{-40}
klumpend	wichtig	kurzreichweitig	aber Erde aus 10^{50} T.

Die Wechselwirkung zw. 2 T. hängt von Eigenschaftspaaren (m, q, color, ...) ab

Schlechte Apparate sehen T.-Klumpen als "Massenpkte"

Ww. zw. Massenpkten = Σ (elementare Ww.)

Für die Mechanik besteht die Welt aus Massenpunkten (k), welche man numerieren kann (k), und sie behandelt deren Bewegung zu <u>gegebenen</u> Kräften (ist darum nur "halbe" Theorie).

<u>Das</u> oberste Prinzip ("first principle") der Mechanik ist die Bewegungsgleichung

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{K}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)}$$

"Antwort" "Ursache"

z.B. $= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

oder $= \sum_j (-\gamma m M_j) \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}$

oder $= -\vec{v} f(v)$ (Reibung)

oder $= \vec{e}_{\text{von m nach Haken}} \cdot \kappa (r_{m-H} - \ell)$

Feder-Daten

Die Bew.-gl. ist <u>ein</u> Axiom

braucht "actio = reactio" nicht

erklärt "Inertialsystem" (= in denen sie gilt)

definiert $m, \vec{K}, \vec{E}, \vec{B}, q$

<u>und</u> ermöglicht $\vec{r}(t)$ - Bestimmung!

(braucht keine anderen Überlegungen, keine Fliehkräfte, ..)

<u>Vorhersage</u>

$\vec{r}(0)$ und $\vec{v}(0)$ bekannt $\Rightarrow$ $\vec{r}(t)$ wegen

Bew.gl.-Zerlegung in $\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = \frac{1}{m}\vec{K} \end{cases}$ und

$\vec{r}(t+dt) = \vec{r}(t) + dt\, \vec{v}(t)$

$\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + dt\, \frac{1}{m} \vec{K}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$

(3D: 6 Anfangsdaten ; 2D: 4 ; 1D: 2)

Lösung z.B. per Computer (numerisch; genähert),

am besten aber per Rechnung.

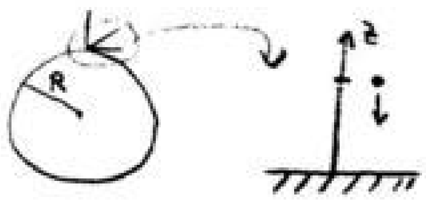
(("System gekoppelter Differentialgln. zweiter Ordnung"

gee... können fast so über jeden lösbaren Spezialfall!))

Freier Fall

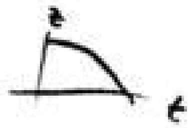
$$\vec{K}_{\text{auf } m} = -\frac{\gamma m M}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\times|}$$

$\vec{r}_0 = (0,0,-R)$; $\vec{r}-\vec{r}_0 \approx -\vec{r}_0$, $\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\times|} \approx \vec{e}_3$



$$\vec{K} = -m\left(\frac{\gamma M}{R^2}\right)\vec{e}_3 =: -mg\vec{e}_3$$

$$\boxed{\ddot{z} = -g, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad z(0) = h}$$ (1D, 2 Anfangsdaten ✓)

ER $\Rightarrow$ Ansatz erlaubt. Lsg ~ 

"Eindeutigkeitsrahmen"; s. Ü 14,15

$z(t) = A + Bt + Ct^2 + D\cos(\omega t)$

- Ansatz (darf unzureichend sein)
- bilde $\dot{z}, \ddot{z}$, erfülle Bew.Gl. identisch $\forall t$ (hier: 5 Param.)
- setze in Anf.bed. ein, notiere Resultat

$\dot{z} = B + 2Ct - D\omega\sin(\omega t)$

$\ddot{z} = 2C - D\omega^2\cos(\omega t) \overset{!}{=} -g \quad \Rightarrow \quad D = 0, \; C = -\frac{g}{2}$

$\dot{z}(0) = B \overset{!}{=} 0$

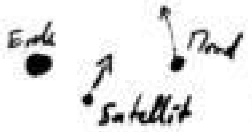
$z(0) = A = h$, also $\underline{z = h - \frac{g}{2}t^2}$

es gilt nur eine Lsg, also ist sie es.

(hätten wir C-Term vergessen, wäre Bew.Gl. nicht $\forall t$ erfüllbar gewesen)

"Aufleiten" ($\dot{z} = -gt + B$, $\quad \dot{z}(0) = B \overset{!}{=} 0$

$z = -\frac{g}{2}t^2 + Bt + A$, $\quad z(0) = A \overset{!}{=} h$)

geht nicht immer; z.B. 3-Körper-Problem, 

1D harmonischer Oszillator

$K_1 = -\kappa x$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(0) = 0}$$ (($+B\cos(\omega_2 t)$, brauche nicht wg. $x(0) \overset{!}{=} 0$))

Ansatz : $x = A\sin(\omega t)$. bilde $\dot{x}, \ddot{x}$, erfülle $\dot{x}(0), x(0)$

$\Rightarrow \underline{x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\,t\right)}$

behandle nun (möglichst) allg. Folgerungen aus $m\ddot{\vec r} = \vec K(\vec r, \dot{\vec r}, t)$

$\vec p$ und $\vec L$

„Wucht" = Impuls = $\vec p := m\vec v$

wenn zu beschleunigende Masse const_t, dann ((sonst: s. Raketengl. ↓))

$$m\ddot{\vec r} = \partial_t m\dot{\vec r} = \dot{\vec p} = \vec K$$

Impulserhaltung : $\dot{\vec p} = 0 \Leftrightarrow \vec K = 0$ (langweilig!)

mehrere Teilchen, Gesamtimpuls $\vec P = \sum_{a=1}^{N} \vec p_a$

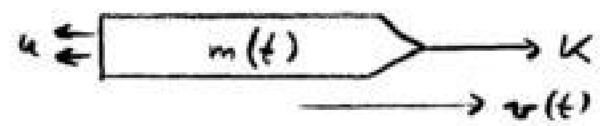
$$\dot{\vec P} = \sum_a \dot{\vec p}_a = \sum_a m_a \ddot{\vec r}_a = \sum_a \vec K_{\text{auf } a}$$

$$\vec K_{\text{auf } a} = \vec K^{\text{von außen}}_{\text{auf } a} + \vec K^{\text{von } b}_{\text{auf } a}$$

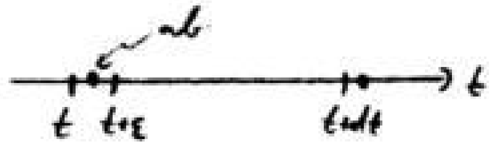
wenn $\sum_a \vec K_a^{\text{v. außen}} = \vec 0$ und $a \overset{W}{\approx} r$, dann

$$\sum_a \vec K^{\text{von } b}_{\text{auf } a} \approx \vec 0 \quad \text{und} \quad \dot{\vec P} = \vec 0$$

Raketengleichung:



Alle dt „platzt" ein dm nach links ab,
mit Geschw. u rel. zur Rakete.



$p_{\text{vor}} = p_{\text{nach}}$: $m(t)v(t) = [m(t) - dm]\, v(t+\varepsilon) + dm\, [v(t) - u]$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = m(t)\,[\underbrace{v(t+\varepsilon)} - v(t)] - dm\, u \; \underbrace{\cancel{- dm\,[v(t+\varepsilon) - v(t)]}}_{\text{quadr. klein!}} \approx 0$$

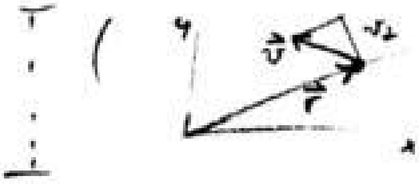
Beschl. während dt : $v(t+dt) = \underbrace{v(t+\varepsilon)} + dt\, \frac{1}{m} K$

eliminiere $\underbrace{v(t+\varepsilon)}$: $0 = m(t)\left[v(t+dt) - dt\,\frac{1}{m}K - v(t)\right] - dm\, u$

mal $1/dt$: $0 = m(t)\left[\frac{v(t+dt) - v(t)}{dt} - \frac{1}{m}K\right] - \frac{dm}{dt}\, u$

$$\Rightarrow \quad \underline{m\dot v + \dot m u = K} \qquad \text{(lösen? später mal..)}$$

"Drehwucht" = Drehimpuls = $\vec{L} := \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\vec{r}\times\vec{v}_\perp$

(
$\vec{L} = \vec{e}_3\, r m v_\perp = m\vec{r}\times\vec{v}_\perp = m\vec{r}\times\vec{v}$.

ein Teilchen hat $\vec{L}$ auch ohne Stange)

$\vec{L}$ ist vom Ursprung abh. !

$$\partial_t \vec{L} = m\dot{\vec{r}}\times\vec{v} + m\vec{r}\times\dot{\vec{v}} = 0 + \vec{r}\times\vec{K}$$

"Drehmoment"

(allg., egal wo Ursprung ist)

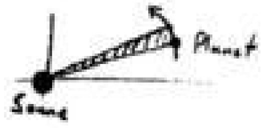
wenn $\vec{K}\sim\vec{r}$ (oder $\vec{r}=0$, oder $\vec{K}=0$) ("Zentralkraft": $\vec{K} = K(\vec{r})\frac{\vec{r}}{r}$), dann

$\dot{\vec{L}} = 0$, d.h. $\vec{L} = \mathrm{const}_t$

"Drehimpulserhaltung" für 1 T. ((s. auch Ü5))

Flächensatz (Kepler 1571-1630, Newton 1643-1727)

Planet (m) um Sonne (= Ursprung)



$\vec{L}$ behält Richtung (m bleibt in Ebene $\perp \vec{L}$) und Betrag

$$\mathrm{const}_t = \frac{1}{2m}|\vec{L}| = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| = \frac{1}{2} r v_\perp = \frac{r\cdot dr_\perp}{2\,dt} = \frac{d\,\text{Fläche}}{dt}$$

T und V

Wollen "Energie" einer Physik ergründen — multipliziere deren Bew.gl. mit der einmal weniger abgeleiteten Unbekannten.

Hier: $\vec{v}\cdot\left[\, m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}\,\right]$

$$m\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = \vec{v}\cdot\vec{K}$$

$$\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right)^{\cdot} = \frac{d\vec{r}\cdot\vec{K}}{dt} = \frac{dA}{dt}$$ mit dA = am T. in dt verrichtete Arbeit

Energiezufuhr erhöht also die Größe

$$\frac{m}{2}\vec{v}^2 =: T = \text{kinetische Energie}$$

Kann man auch $\vec{v}\cdot\vec{K} = (\text{etwas})^{\cdot}$ schreiben?

"Potential" ("pot. E.")

wenn es zu gegebenem $\vec{K}(\vec{r})$ eine Hilfsfunktion $V(\vec{r})$ derart gibt, daß $\vec{K}(\vec{r}) = -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$ ((= $-\vec{\nabla} V$)) gilt, dann ist $\vec{v}\cdot\vec{K} = -\vec{v}\cdot(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) = -\partial_t V(\vec{r}(t))$

und folglich $\partial_t (T+V) = 0$

und somit $\frac{m}{2}\vec{v}^2(t) + V(\vec{r}(t)) = \mathrm{const}_t = E$ ("Energieerhaltungssatz" der Mechanik eines Tlp.)

Gebrauch der Erhaltungssätze:

$\vec P_{\text{vor Stoß}} = \vec P_{\text{nach Stoß}}$

$\vec L_{\text{start}} = \vec L_{\text{später}}$

$(T+V)_{\text{start}} = (T+V)_{\text{später}}$

<u>V's</u> A) $\vec K = (0,0,-mg) \overset{?!}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$

V unabh. von x, y ; $V'(z) = mg$, $V(z) = mgz + C^{\text{egal}}$

wähle $C=0$ $\Rightarrow$ $V(z) = mgz$

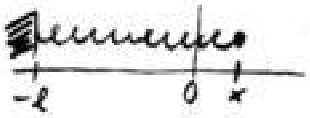
((allg.: $[V]$ = Kraft · Länge = Energie

mühsame Positionsänderung erhöht V

manchmal ist E-Satz schneller als Bew.gl.-Lösen))

B) "ideale Feder" := { hat keine Masse, keine Eigenschwing., erfüllt a = r perfekt, hat Daten κ, ℓ }

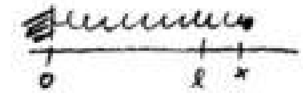
(Kraft = κ · Auslenkung)



$K_1 = -\kappa x \overset{?!}{=} -\partial_x V(x)$

$\Rightarrow V(x) = \frac{\kappa}{2} x^2 \cancel{+C}^{\,0}$

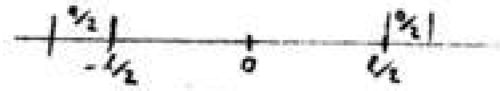
Translation um $+\ell$, $x \to x-\ell$



$K_1 = -\kappa(x-\ell)$

$V(x) = \frac{\kappa}{2}(x-\ell)^2$

V ist über Feder verteilt: Hälfte hat 2κ

($\kappa a = K = \kappa_{\text{Hälfte}} \cdot \frac{a}{2}$, )

und es ist tatsächlich $V = \frac{\kappa}{2}a^2 \overset{?!}{=} 2\,\frac{(2\kappa)}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$

... weiter halbieren, bis zu atomaren Ausdehnungen.

Folglich hat $\vec K = \vec e_{m\to\text{Auf.}}\,\kappa\,(r_{mA}-\ell)^2$

das Potential $V = \frac{\kappa}{2}(r_{m\text{Auf.}}-\ell)^2$

(check: per $-(\partial_x V, \dots, \dots)$ zu $\vec K$ gelangen!)

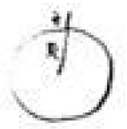
c) $\vec{K} = -\gamma m M \frac{\vec{r}}{r^3} \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$

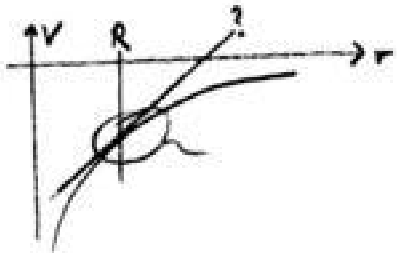
Ansatz: $V(\vec{r}) = f(r)$

$-\partial_x V = -f'(r) \cdot \partial_x \sqrt{x^2+y^2+z^2} = -f'(r) \frac{x}{r} \overset{!}{=} -\gamma m M \frac{x}{r^3}$

$\Rightarrow f'(r) = \frac{\gamma m M}{r^2}$, $f = \frac{c}{r}$, $f' = -\frac{c}{r^2}$, $c = -\gamma m M$, $f = -\frac{\gamma m M}{r} + A$

$\Rightarrow \underline{V(\vec{r}) = -\frac{\gamma m M}{r}}$ "Gravitations-Potential"

(( , $z \ll R$, $V = -\frac{\gamma m M}{R+z} = -\frac{\gamma m M (R-z)}{R^2 - z^2} \approx const_z + m \underbrace{\frac{\gamma M}{R^2}}_{=g} z + O(z^2)$



oder: durch Reihenentwicklung

$\frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} + Az + O(z^2)$

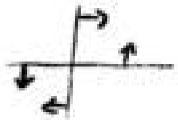
$1 = (R+z)\left(\frac{1}{R} + Az + \dots\right)$

$= 1 + RAz + \frac{z}{R} + O(z^2)$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{R^2}$))

D) komponentenweises Aufleiten [s.a. Ü18]

D1) 2D, $\vec{K}(\vec{r}) = (\alpha y, \alpha x) \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V)$



$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha y \Rightarrow V = -\alpha x y + f(y)$

$\partial_y V = \underset{\sim}{-\alpha x} + f'(y) \overset{!}{=} \underset{\sim}{-\alpha x} \Rightarrow f = const_{x,y}$

$\Rightarrow \underline{\underline{V = -\alpha x y}}$

D2) $\vec{K} = \alpha(x-y, x-y)$

$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$, $V = -\frac{\alpha}{2} x^2 + \alpha x y + f(y)$

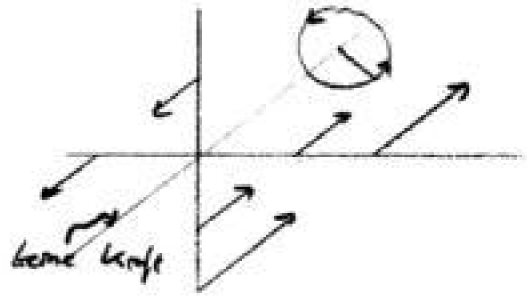
$\partial_y V = \underset{\sim}{\alpha x} + f'(y) \overset{!}{=} \underset{\sim}{-\alpha x} + \alpha y$ <u>nicht</u> erfüllbar!

$\vec{K}$ hat <u>kein</u> V.

E-Satz gilt <u>nicht</u>:

Pendel-E nimmt zu

(es <u>gibt</u> solche $\vec{K}$'s)



<u>Vermutung</u>: $\vec{K}$ <u>hat</u> V $\Leftrightarrow$ sich auf der $\vec{K}$-"Strömung" nichts dreht

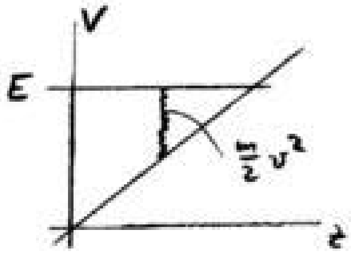
(SS: $\text{rot}\, \vec{K} = \vec{0} = \nabla \times \vec{K}$)

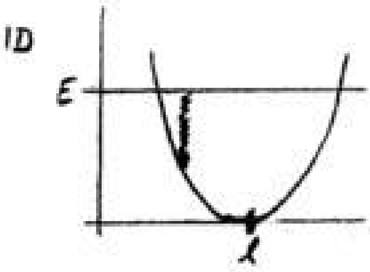
V's addieren sich, weil sich $\vec{K}$'s addieren:

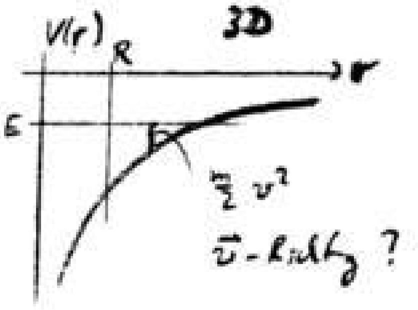
$$\vec{K} = -(\partial_x V, \ldots, \ldots)$$
$$\vec{F} = -(\partial_x W, \ldots, \ldots)$$
$$\overline{\vec{K} + \vec{F} = -(\partial_x (V+W), \ldots, \ldots)}$$

Gesamtpotential eines T.-Systems $=$ Σ seiner V's.

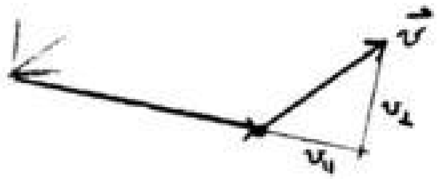
v²-Ablesen $\quad \frac{m}{2} v^2 = E - V$







effektives Potential



$$v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}_\perp$$

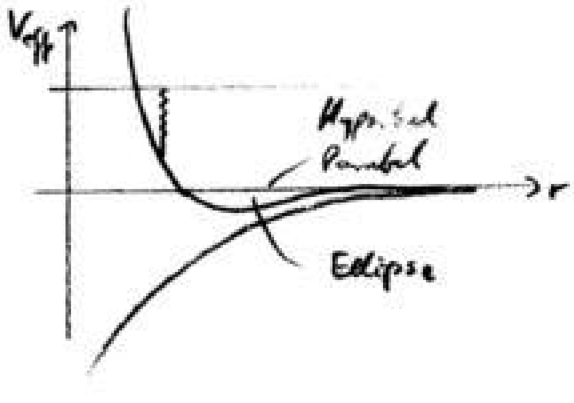
$$L = |\vec{L}| = m r v_\perp$$

$$\dot{r} = \partial_t \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \vec{e}_r \vec{v} = v_\parallel \qquad \text{(vgl. Skript S.16, Ende Kap. 2)}$$

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) + V(r)$$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \\ \text{mit } V_{eff}(r) &= \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \end{aligned}}$$

Bsp zu $V(r) = -\frac{\gamma m M}{r}$



Newton regiert die Welt: Kräfte bekannt, weiter per $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$

Zukunft liegt fest. (Laplace'scher Dämon)

4. Tensoren

Fremdwort ?

zur Beruhigung: Vektor = Tensor 1. Stufe ; 2. Stufe , ...
$(\,'' , '' , ''\,)$ $\begin{pmatrix} '' & '' & '' \\ '' & '' & '' \\ '' & '' & '' \end{pmatrix}$

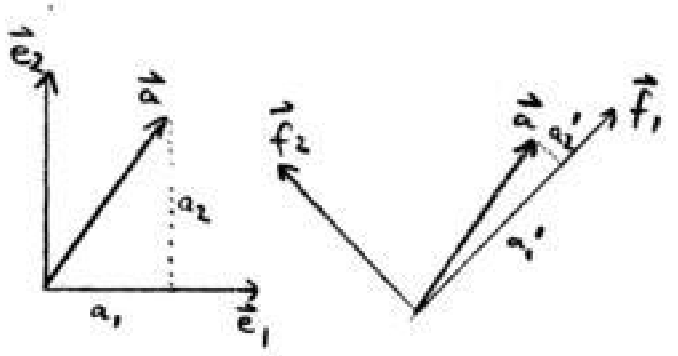
Vektoren sind "Pfeile".

aber was ist ein "Pfeil" ?

→ etwas, was in gedrehtem System andere Schatten bekommt.

4.1 Drehmatrix

Koord.-System-Drehung.
Pfeil bleibt stehen.
Komponenten ändern sich.



„$\vec a'$" $:= (a_1', a_2', a_3')$

(hier: Vektoren vertikal aufschreiben von Vorteil)

$$\vec a' = \begin{pmatrix} a_1' = \vec f_1 \vec a_1 \\ a_2' = \vec f_2 \vec a_1 \\ a_3' = \vec f_3 \vec a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec f_1 \vec e_1 a_1 + \vec f_1 \vec e_2 a_2 + \vec f_1 \vec e_3 a_3 \\ \vec f_2 \vec e_1 a_1 + \dots \\ \underbrace{\vec f_3 \vec e_1 a_1 + \vec f_3 \vec e_2 a_2 + \vec f_3 \vec e_3 a_3}_{(\vec f_3 \vec e_1,\, \vec f_3 \vec e_2,\, \vec f_3 \vec e_3)\cdot \vec a} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec f_1 \vec e_1 & \vec f_1 \vec e_2 & \vec f_1 \vec e_3 \\ \vec f_2 \vec e_1 & \dots & \dots \\ \vec f_3 \vec e_1 & \vec f_3 \vec e_2 & \vec f_3 \vec e_3 \end{pmatrix}}_{= D} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

= Matrix D angewandt auf $\vec a$
d.h. D-Zeile $\cdot \vec a$, nach "Zeile mal Spalte"-Regel:

allg. $\begin{pmatrix} \text{———} \\ \sim\sim\sim \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \wr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{—} \cdot \wr \\ \sim \cdot \wr \\ \cdots \cdot \wr \end{pmatrix}$

Operator · Element = neues Element

kurz: $\vec a' = D \vec a$, $D = \begin{pmatrix} - \vec f_1 - \\ - \vec f_2 - \\ - \vec f_3 - \end{pmatrix}$

D-Zeilen: $\vec f$'s im alten System
D-Spalten: $\vec e$'s im neuen

kurz: $a_j' = D_{\overset{\text{Zeile}}{j}\overset{\text{Spalte}}{k}}\, a_k$, $D_{jk} = \vec f_j \cdot \vec e_k$

es ist $(D\lambda\vec{a})_j = D_{jk}\lambda a_k = (\lambda D_{jk})a_k = \lambda(D\vec{a})_j$

allg.: $\lambda\cdot\text{Matrix} := \begin{pmatrix} \lambda\ldots & \lambda\ldots & \lambda\ldots \\ \lambda\ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda\ldots & \lambda\ldots & \lambda\ldots \end{pmatrix}$

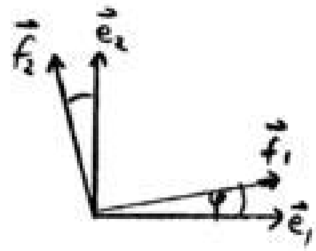
es ist $(D(\vec{a}+\vec{b}))_j = D_{jk}(a_k+b_k) = D\vec{a} + D\vec{b}$

$\Rightarrow$ Matrix-Anwendung ist <u>lineare</u> Operation.

3 elementare D's

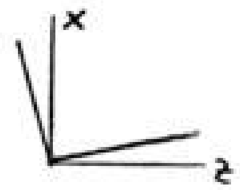
$c := \cos(\varphi)$ $s := \sin(\varphi)$

Drehung um Winkel φ um z-Achse



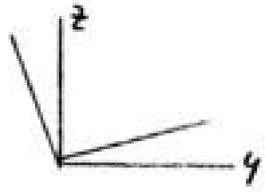
$$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

〃 um y-Achse



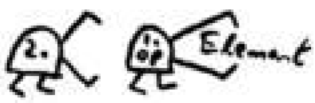
$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

〃 um x-Achse



$$D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

2 Drehungen nacheinander



$$\vec{g}\text{'s} \xleftarrow{(2)} \vec{f}\text{'s} \xleftarrow{(1)} \vec{e}\text{'s}$$
$$\vec{a}'' \qquad \vec{a}' \qquad \vec{a}$$

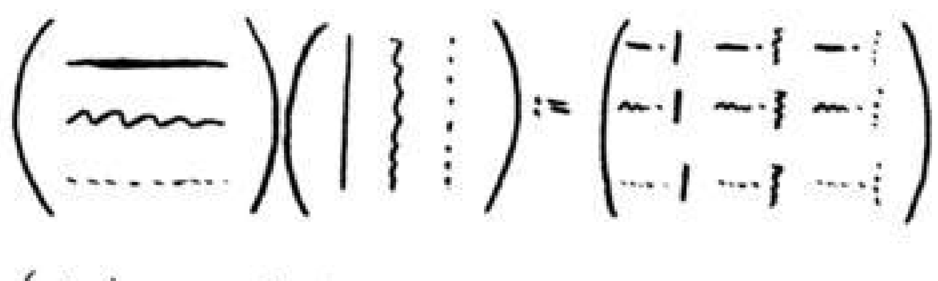
$\vec{a}'' = D^{(2)}\vec{a}'$, $\vec{a}' = D^{(1)}\vec{a}$

$= D^{(2)}(D^{(1)}\vec{a}) = „D^{(2)}D^{(1)}" \vec{a}$?

$$a''_j = D^{(2)}_{jl}(\ldots)_l = \underbrace{D^{(2)}_{jl}D^{(1)}_{lk}}_{D^{\text{ges.}}_{jk}} a_k$$

$D^{\text{ges.}}_{jk} = \begin{pmatrix} j\text{-te Zeile} \\ \text{von } D^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k\text{-te Spalte} \\ \text{von } D^{(1)} \end{pmatrix}$

allg.



$(AB)_{jk} = A_{jl}B_{lk}$

Reihenfolge wichtig: $AB \neq BA$!

Spur

$Sp(A) := A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{jj}$

$Sp(AB) = Sp(BA)$

denn: $(AB)_{jj} = A_{jk} B_{kj} = B_{kj} A_{jk} = (BA)_{kk}$

also: $Sp(ABC) = Sp(CAB)$ "zyklische Invarianz der Spur"

Umgang mit Matrizen

1. $(A\vec{a})_j = A_{jk} a_k$
2. $(AB)_{jk} = A_{jl} B_{lk}$
3. $(\lambda A)_{jk} = \lambda A_{jk}$
4. $(A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$
5. $Sp(A) = A_{jj} \Rightarrow Sp(AB \dots C) = Sp(B \dots CA)$
6. $\det(A) = \varepsilon_{jkl} A_{1j} A_{2k} A_{3l}$

   $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ (Zitat)
7. $(A^T)_{jk} := A_{kj}$, $A^T = A \Leftrightarrow A$ ist "symmetrisch"

   $A^T = -A \Leftrightarrow A$ ist "antisymmetrisch"

   $\Rightarrow \vec{b} \cdot (A\vec{a}) = (A\vec{a}) \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} \vec{a} A^T \vec{b}$

   denn: $A_{jk} a_k b_j = a_k (A^T)_{kj} b_j$

   Anwendung: $\vec{a}'^2 = (D\vec{a}) \cdot D\vec{a} = \vec{a} \underbrace{D^T D}_{= 1} \vec{a} = \vec{a}^2$, s. unten

   $\vec{a}' \cdot \vec{b}' = \vec{a} D^T D \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$ "Invarianz des Skalarprod. unter Drehung"
8. $A^{-1} :=$ die $A^{-1} A = \mathbb{1}$ erfüllende Matrix
9. Dyadisches Produkt $(\vec{a} \circ \vec{b})_{jk} := a_j b_k$

   $\Rightarrow [(\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c}]_j = (\vec{a} \circ \vec{b})_{jk} c_k = a_j b_k c_k = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \vec{c})]_j$

   kurz: $(\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \vec{c})$
10. $(\vec{a} \times \dots) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$

   denn: $(\vec{a} \times \dots) \vec{b} = (\,\cdot/.\,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$ ✓

Drehachse und -winkel

$$DD^T = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -\vec{f}_2- \\ -\vec{f}_3- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$D^TD = \begin{pmatrix} -\vec{e}_1{}'- \\ -\ 2\ - \\ -\ 3\ - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{e}_1{}' & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ Orthonormierung : $DD^T = D^TD = \mathbb{1}$

Rechtssystem erhalten: $\det(D) = 1$ (denn: $\det(D) = f_1(\vec{f}_2 \times \vec{f}_3)$, s. Spatprodukt Kap. 1; Skript S. 10)

Winkeltreue: $D(\vec{a} \times \vec{b}) = (D\vec{a}) \times (D\vec{b})$

$D \to$ Achse $\vec{e}$: $D\vec{b} = \vec{b}$, $\vec{e} = \vec{b}/b$

$D \to$ Winkel φ : $Sp(D) = 1 + 2\cos(\varphi)$

$\vec{e} \cdot \left((D\vec{f}) \times \vec{f}\right) = \sin(\varphi)$ mit $\vec{f}$ Einheitsvektor $\perp \vec{e}$

$$\vec{e}, \varphi \to D : \quad D = \underbrace{c}_{\cos(\varphi)}\mathbb{1} + (1-c)\,\vec{e} \circ \vec{e} - \underbrace{s}_{\sin(\varphi)}(\vec{e} \times \ldots) \qquad (*)$$

!

Strategie: $(*)$ verifizieren $\to$ Rest folgt.

$(*)$ ist vektoriell formuliert, also genügt Nachweis eines Spezialfalles.

zu z.B. $\vec{e} = (0,0,1)$

ist $\vec{e} \circ \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $(\vec{e} \times \ldots) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

und somit

$$(*)_{rhs} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_{z,\varphi} \quad \text{qed.}$$

q.e.d.
quod erat demonstrandum
was zu zeigen war

$\vec{e} = (u, v, w)$: liefert die allgemeine Drehmatrix:

$$D_{allg} = \begin{pmatrix} c + (1-c)u^2 & (1-c)uv + sw & (1-c)uw - sv \\ (1-c)vu - sw & c + (1-c)v^2 & (1-c)vw + su \\ (1-c)wu + sv & (1-c)vw - su & c + (1-c)w^2 \end{pmatrix}$$

aus D_{allg} folgen nun die restlichen Eigenschaften S.28 oben:

z.B. $Sp(D) = 3c + (1-c)\underbrace{(u^2+v^2+w^2)}_{=1} = 1 + 2c$ (immer!)

D → Achse: Eigenwertproblem

$(D-\mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist homogenes Gl. system

legt $|\vec{b}|$ nicht fest, also ist (zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$)

eine der 3 Gln $(D-\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abhängig (folgt aus den beiden anderen)

$(D-\mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist Spezialfall des Eigenwertproblems,

d.h. der Frage, welche Elemente sich bei Op-Anw. reproduzieren:

(lin. Op.)(Element) = Faktor (gleiches Element)

$$\underset{\text{gegeben}}{H}\quad \vec{\psi} = E\quad \vec{\psi}$$

gesucht: Eigenvektor (EV) $\vec{\psi}$
Eigenwert (EW) E

((z.B. hat $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2$ die EV ~ trig(kx) mit EW $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$))
(((Beispiel der QM: $i\hbar\dot{\psi} = H\psi$)))

hier: eine Drehmatrix hat stets den EW +1
und die Drehachse als zugehörigen EV.

bessere Vektor-Def.

vgl. Kap. 1; Skript S.2

Tripel a_j sind <u>Vektoren</u>, wenn unter Koord.-System-Drehung (D) die Abänderung der Elemente in $a_j' = D_{jk} a_k$ (sowie Addition und λ-Multiplikation) physikalisch sinnvoll ist

oder: $\boxed{\text{Box S.2}}$ <u>und</u> "Pfeile" sind Koordinaten-Dreh-anfällige Schattenspender gemäß $\vec{a}' = D\vec{a}$

4.2 Tensoren 2. Stufe

$H_{j_1 j_2 \dots j_n}$ ist Tensor n-ter Stufe $\Leftrightarrow$ die Elemente bei Ko-Syst Drehung (D) übergehen in

$$H'_{j_1 \dots j_n} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \dots D_{j_n k_n} H_{k_1 \dots k_n}$$

Stufe n	Name	Schema	Transformation
0	Skalar	eine Zahl c	$c' = c$
1	Vektor	Tripel $\vec{a}$	$\vec{a}' = D\vec{a}$
2	Tensor 2. St.	Matrix H	$H' = DHD^T$ (s.u.)
3	z.B. ε_{ijk}	Kubus	s.o.

<u>n=0</u> Skalare sind m, q, c, Temp T, $V(\vec{r})$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$,
$Sp(H)$ ((s.u.)), $\det(H)$ ((s.u.))

<u>n=1</u> Vektoren, s. halbes WS

<u>n=2</u> Tensoren 2. Stufe

$$H'_{j_1 j_2} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} H_{k_1 k_2} = D_{j_1 k_1} H_{k_1 k_2} (D^T)_{k_2 j_2}$$

d.h. $H' = DHD^T$

((verstehen jetzt: $Sp(H') = Sp(DHD^T) = Sp(HD^TD) = Sp(H)$
und $\det(H') = \det(D)\det(H)\det(D^T) = \det(H)$))

<u>Philo</u>: Waren immer stolz auf vektoriell formulierte Zus-hänge. Respektieren die Invarianz der Natur unter Ko-Syst-Drehungen. Jede Natur-Größe muß sich <u>verhalten</u> unter Drehungen, ist also Skalar oder Vektorkomp. oder Tensorkomp.

$\boxed{\text{Jede phys. Größe ist als Komponente eines Tensors zu identifizieren}}$

jede Antwort-Matrix ist Tensor 2. Stufe

$$\vec j = \underline{\sigma}\,\vec E \;,\quad \vec k = -\underline{K}\,\vec r \;,\quad \vec v = \underline{(\vec\omega \times \ )}\,\vec r \;,\quad \vec L = \underline{I}\,\vec\omega$$

Struktur: $\overrightarrow{\text{Antwort}} = (\text{Matrix})\,\overrightarrow{\text{Ursache}}$

$$\vec a = H \quad \vec u \qquad (*)$$

Frage nach H' in $\vec a' = H'\vec u'$

D auf $(*)$ anwenden: $\vec a' = D\vec a \overset{!}{=} DH\vec u = DHD^TD\vec u = DHD^T\vec u'$

$\Rightarrow \ (H' - DHD^T)\vec u' = \vec 0 \quad \forall \vec u'$

$\Rightarrow$ H ist Tensor 2. Stufe

(($\vec a = \vec u = \mathbb{1}\vec u$: auch $\mathbb{1}$ ist Tens. 2. St.))

$\rightsquigarrow$ ein linearer Zus.hang zw. 2 Vektoren definiert stets einen Tensor 2. Stufe

Bsp

z.B. Ziehen eines Schlittschuhläufers
$\vec v = H\vec k$

Bsp σ: e^- im Draht

Ladungs-Stromdichte $\vec j = \dfrac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}\perp\vec e}\,\vec e$
(Energie-, Teilchen-, ...)

in Δt fließt durch F das Volumen $F\cdot(v\,\Delta t)$,
und die Anzahl $\frac{N}{V}\cdot F(v\,\Delta t)$ Teilchen

$$\vec j = \frac{q\cdot\frac{N}{V}\cdot F\cdot v\,\Delta t}{\Delta t\; F}\,\vec e = q\frac{N}{V}\,\vec v = q\frac{N}{V}\,Hq\vec E =: \sigma\vec E$$

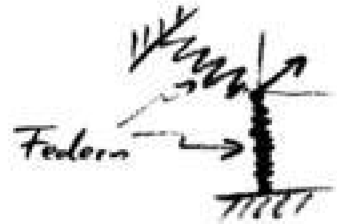
"Leitfähigkeitstensor"

(($\vec E$-Richtung so, daß $\vec j \parallel \vec E$? s. 4.3 ; $j = \sigma E$

dann (Strom = Ladung pro Zeit = Fj)

$$I = \underbrace{F\frac{\sigma}{L}}_{\frac{1}{\text{"Widerst."}}}\;\underbrace{LE}_{\text{"Spannung"}} = \frac{U}{R} \qquad \text{"Ohm"} \quad))$$

Bsp $\underset{\sim}{\mathcal{K}}$:



Ursprung in Gleichgew.-Position

$$\vec{K} = -\mathcal{K}\vec{r} + O(r^2)$$

(($\vec{r}$-Richtung so, daß $\vec{K} \parallel \vec{r}$? s. 4.3))

existiert ein Potential $V(\vec{r})$?

2D: $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}$

$$\partial_x V \overset{!}{=} -K_1 = \kappa_{11} x + \kappa_{22} y \ , \quad V = \frac{\kappa_{11}}{2} x^2 + \kappa_{12} xy + f(y)$$

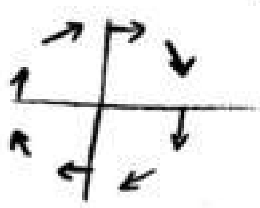
$$\partial_y V = \kappa_{12} x + f'(y) \overset{!}{=} -K_2 = \kappa_{21} x + \kappa_{22} y$$

$\Rightarrow$ <u>nur</u> für $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ existiert $V = \frac{\kappa_{11}}{2} x^2 + \frac{\kappa_{22}}{2} y^2 + \kappa_{12} xy$

allg: $\mathcal{K} = \mathcal{K}^T \Leftrightarrow \vec{K} = -\mathcal{K}\vec{r}$ hat $V = \frac{1}{2} \vec{r}\mathcal{K}\vec{r}$

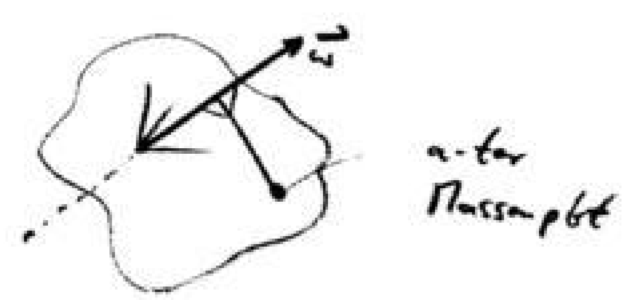
((der 2. Term in $\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\mathcal{K} + \mathcal{K}^T) + \underset{\sim}{\frac{1}{2}(\mathcal{K} - \mathcal{K}^T)}$

gilt rotierende Kraft: $\underset{\sim}{\vec{K}_{2.\text{Term}}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \kappa_{12} - \kappa_{21} \\ \underbrace{\kappa_{21} - \kappa_{12}}_{\equiv 2\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha y, -\alpha x)$))



Bsp $\underset{\sim}{I}$: "Trägheitstensor"

starrer Körper
Achse $\vec{\omega}$ verlötet
Ursprung auf Achse



$$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a =: I\vec{\omega} \quad \text{definiert } I$$

falls $\vec{L}_a = I_a \vec{\omega}$, dann $\vec{L} = \sum_a I_a \vec{\omega}$, d.h. $I = \sum_a I_a$

(... Bsp I)

$$\vec{L}_a = m_a \vec{r}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_a) \overset{\text{bac-cab}\,:\ \vec{\omega}(\vec{r}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega})}{=} \underbrace{m_a \left(r_a^2 \mathbb{1} - \vec{r}_a \circ \vec{r}_a \right)}\vec{\omega}$$

$$I_a \stackrel{!}{=} m_a \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2 - y^2 & -yz \\ -zx & -zy & r^2 - z^2 \end{pmatrix}_{\text{alles Index } a}$$

$$\Rightarrow I = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ & x^2 + z^2 & -yz \\ \text{sy.} & & x^2 + y^2 \end{pmatrix}_a$$

es ist $\quad \vec{L}' = I' \vec{\omega}' \quad$ mit $\quad I' = D I D^T$

((denn: $\quad \vec{L}' = D \vec{L} = D I \vec{\omega} = D I D^T D \vec{\omega} = I' \vec{\omega}'$))

(($\vec{\omega}$ so, daß $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$? d.h. daß $I\vec{\omega} = \text{const} \cdot \vec{\omega}$? s. 4.3))

Philo: I-Komponenten hängen von Position des Körpers, und damit i.A. von der Zeit ab.
$\rightarrow$ Drehmomente $\partial_t \vec{L} = \vec{r} \times \vec{K}$
machen Achsen-Lager kaputt! "Auswuchten $\hat{=}$ Achse $\parallel$ Hauptachse"

Schwerpkt des st. Ks.: $\quad M = \sum_a m_a$

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_a m_a \vec{r}_a$$

4.3. Hauptachsentransformation

gegeben: ein symm. Tensor H, d.h. $H^T = H$

Beh.: stets existiert (mind.) ein D derart, daß

$$H' = D H D^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad , \text{ d.h. } H' \text{ diagonal wird.}$$

Frage clever aufschreiben:

$$\begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec f_1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ H\vec f_1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec f_1 H \vec f_1 & \vec f_1 H \vec f_2 & 1\,3 \\ \vec f_2 H \vec f_1 & \vec f_2 H \vec f_2 & 2\,3 \\ \vec f_3 H \vec f_1 & 3\,2 & 3\,3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ es muß $H\vec f_1 = \lambda_1 \vec f_1$, $H\vec f_2 = \lambda_2 \vec f_2$, ... sein

$\Rightarrow$ müssen also $H\vec f = \lambda \vec f$ lösen

und 3 orthonormierte $\vec f$'s mit je zugehörigen reellen λ's erhalten.

Das geht immer, denn:

A) $\vec f$ ist normierbar ($H\vec f = \lambda \vec f$ legt Betrag nicht fest)

B) $\vec f$'s zu verschiedenen λ's sind automatisch orthogonal:

$H\vec f_1 = \lambda_1 \vec f_1 \quad \Rightarrow \quad 0 = H\vec f_1 - \lambda_1 \vec f_1$ multipl. m. $\vec f_2$ v. links

$$0 = \underbrace{\vec f_2 H \vec f_1}_{} - \lambda_1 \vec f_1 \vec f_2 \qquad H\vec f_2 = \lambda_2 \vec f_2$$

$$= (H^T \vec f_2)\vec f_1 = (H\vec f_2)\vec f_1 \stackrel{\leftarrow}{=} \lambda_2 \vec f_2 \vec f_1$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)\vec f_1 \vec f_2 \quad \text{qed} \blacksquare$$

C) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ können (ohne $\vec f$-Kenntnis) aus einer kubischen Glg. erhalten werden, denn das hom. Gl.-Syst $(H - \lambda \mathbb{1})\vec f = \vec 0$ ist nur lösbar, wenn

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22}-\lambda & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(H_{11}+H_{22}+H_{33}) - \lambda(H_{11}H_{22} + H_{11}H_{33} + H_{22}H_{33}) + \det(H)$$

$$= 0 \text{ ist.}$$

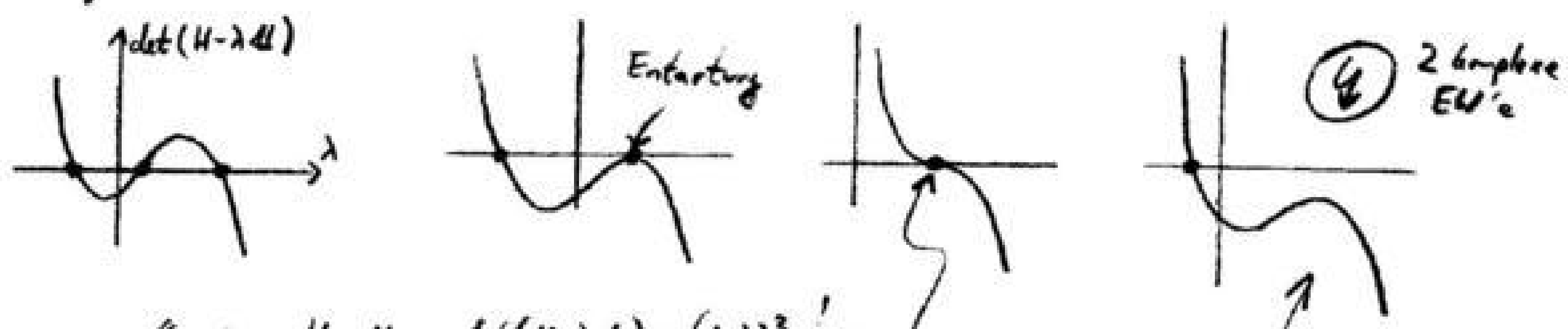
(($\begin{pmatrix} -\vec a- \\ -\vec b- \\ -\vec c- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | \\ \vec f \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt $\vec a \vec f = \vec b \vec f = \vec c \vec f = 0$ zu erfüllen.

$\vec f \neq \vec 0$ nur möglich, wenn $\vec a, \vec b, \vec c$ in einer Ebene,

d.h. Spatprodukt = Determinante = 0))

$$= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$

Möglichkeiten:



((z.B. $H = \mathbb{1}$, $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$;
$\lambda = 1$ ist dreifach entartet))

((In $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda^2-2p\lambda+q) = 0$
und in $\lambda_{2/3} = p \pm \sqrt{p^2-q}$ könnte $q > p^2$ sein.
Dann ist i nötig, $i \cdot i = -1$, und $\lambda_{2/3} = p \pm i\sqrt{q-p^2}$))

D) die EW $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind <u>reell</u>, d.h. 4 tritt nie ein; denn:

$$H\vec{f} = \lambda\vec{f} \;\Rightarrow\; \lambda\vec{f}^*\vec{f} = \vec{f}^* H\vec{f} = (H^T\vec{f}^*)\vec{f} = \lambda^*\vec{f}^*\vec{f}$$

$$\Rightarrow\; \lambda = \lambda^* \quad ((\lambda = a+ib = a-ib = \lambda^* \Rightarrow b = 0))$$

$$((\text{Größe}^* = \text{Größe}\big|_{i\to -i}))$$

E) bei Entartung ($\frac{2}{3}$ λ's gleich) ist ein orthonormiertes $\frac{2}{3}$-Bein <u>wählbar</u>:

$$\left.\begin{array}{l} H\vec{f}_1 = \lambda\vec{f}_1 \\ H\vec{f}_2 = \lambda\vec{f}_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{jede LK aus } \vec{f}_1, \vec{f}_2 \text{ ist EV zu EW } \lambda \\ \Rightarrow \text{also wähle zu } \lambda \text{ zwei orthogonale } \vec{f}\text{'s} \end{array}$$

$$H\vec{f}_3 = \lambda_3\vec{f}_3$$

<u>HT-Rezept</u>

I $H = H^T$ erfüllt? (<u>sieht</u> man: H symmetrisch)

II löse $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = 0$
(kubische Glg: λ_1 raten. dann $\det = (\lambda_1-\lambda)(\text{quadr. Glg.})$)

III Probe: $Sp(H) \overset{?!}{=} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ (und auch: $\det(H) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$)

IV löse $(H-\lambda_1\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}_1$. normiere $\vec{f}_1$ ($|\vec{f}_1| = 1$).
dito für λ_2. dito für λ_3.

V Probe: Orthogonalität, d.h. $\vec{f}_1\vec{f}_2 = \vec{f}_1\vec{f}_3 = \vec{f}_2\vec{f}_3 = 0$

VI Rechtssystem? (evtl ein $\vec{f}$-Vorzeichen ändern) (a) malen (b) $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$ (c) $\det(D) = +1$

VII Resultat notieren: $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} - \vec{f}_1 - \\ - 2 - \\ - 3 - \end{pmatrix}$

Nachtrag zur HT

sy. Matrix

was ist H anschaulich?

e.g. Federn im Raum

[Lese H als Potential von $\vec{K} = -2H\vec{r}$

$$V = \vec{r} H \vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix}$$

((check: $\partial_x V = (\partial_x \vec{r}) H \vec{r} + \vec{r} H (\partial_x \vec{r}) = 2\vec{r} H \vec{e}_x = 2\vec{r}\,\vec{f}_1 = -K_1$ ✓))]

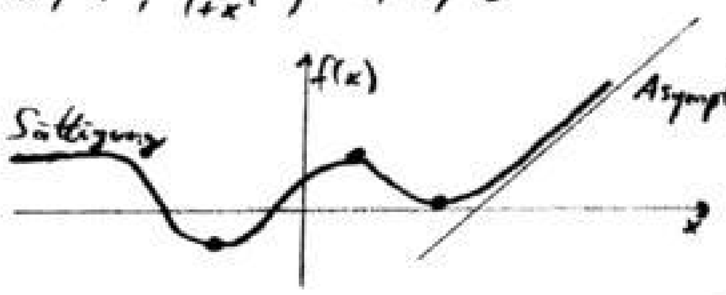
lasse z.B. Computer die [Äquipotenzial]flächen $\vec{r} H \vec{r} = \text{const}$ malen.

$$\vec{r} H \vec{r} = \underbrace{\vec{r} D^T}\underline{D H D^T} D\vec{r} = \vec{r}' H' \vec{r}' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = \text{const}$$

→ (schief im Raum hängendes) Ellipsoid oder Hyperboloid

5. Funktionen

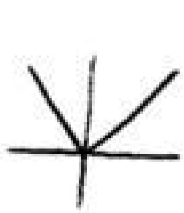
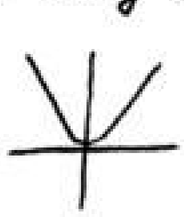
$x,\ x^2,\ \frac{1}{1+x^2},\ c,\ s,\ e^x$ — nur wenige mehr werden benötigt

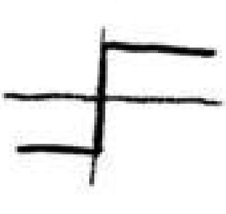
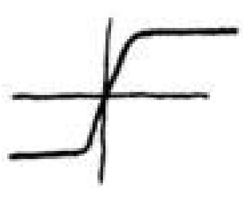


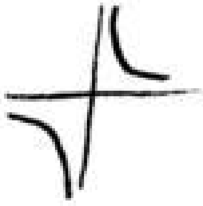
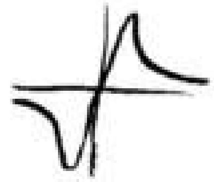
Funktionen der Natur sind (i.d. Regel) "weich",
jedoch manchmal Intervall-beschränkt (z.B. r-Achse).
Haben wir Menschen eine pathologische Stelle auf dem Papier,
so kommt meist deren eingebettete Version der Wahrheit näher.

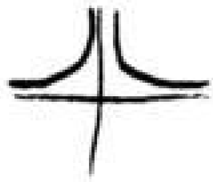
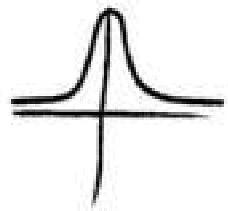
pathologische Stellen unter der Lupe

ε winzig!

Knick, z.B. $|x|$,  ; $\sqrt{x^2+\varepsilon^2}$, 

Stufe, z.B. $\frac{x}{|x|}$,  ; $\frac{x}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}$, 

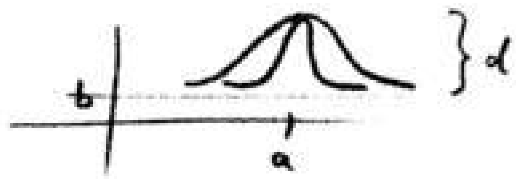
Pol, z.B. $\frac{1}{x}$,  ; $\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}$, 

quadr. Singularität, z.B. $\frac{1}{x^2}$,  ; $\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}$, 

5.1. Skalen-Änderungen, Vokabeln

Verschieben etc.

,



$b + d f(c[x-a])$

Spiegeln $f(-x)$ an f-Achse , $-f(x)$ an x-Achse , $-f(-x)$ am Ursprung

gerade/ungerade

f ist gerade (g) $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

f ist ungerade (u) $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

((Bsp: g: $\cos(x)$, $\frac{1}{1+x^2}$; u: $\sin(x)$, $\frac{x}{1+x^2}$))

$g \cdot u = u$, $u \cdot u = g$

$\partial_x g = u$, $\partial_x u = g$

((denn $\frac{g(-x+\varepsilon)-g(x)}{\varepsilon} = -\frac{g(x-\varepsilon)-g(x)}{-\varepsilon}$))

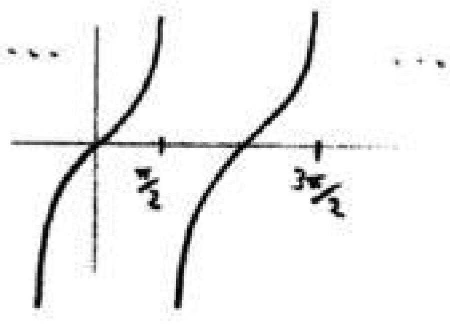
allg.: $f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)}_{g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)}_{u}$

g-u-Bsp. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

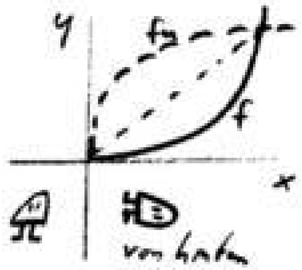
ist ungerade

π-periodisch

hat ∞ viele Pole



Umkehrfkt $f_u(x) :=$ an Diagonale gespiegeltes $f(x)$



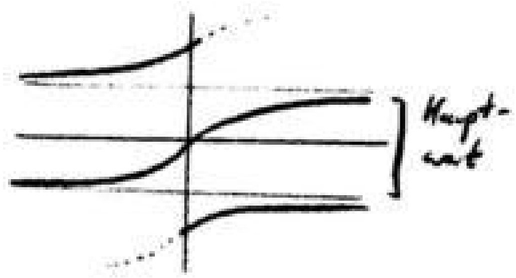
$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ \Rightarrow x &= f_u(y) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= f(f_u(y)) \\ x &= f_u(f(x)) \end{aligned}$$

$$f_u'(x) = \frac{1}{f'(f_u(x))} \quad , \text{ denn}$$

∂_x auf $x = f(f_u(x))$ gibt $1 = f'(f_u(x)) \cdot f_u'(x)$ ■

((Bsp: $f = x^2$, $f_u = \sqrt{x}$, $f_u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$))

Anw.-Bsp $f(x) = \tan(x)$, $f_u(x) =: \arctan(x)$

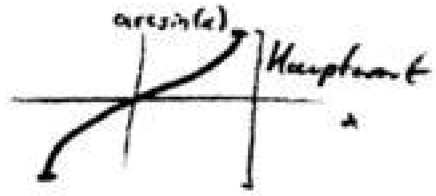


$$\partial_x \tan(x) = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{c^2+s^2}{c^2} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\partial_x \arctan(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

"Stammfunktion" zur Lorentz-Kurve

$$\partial_x \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



5.2. e-Funktion

14 Wünsche an jede neue Fkt — am Bsp dieser neuen.

s. z.B. Gliederung in [Abramowitz / Stegun, Handbook of math. fcts]

- ●$_1$ Name: e-Funktion
- ●$_2$ Bezeichnung: exp(x) (vorläufig)
- ●$_3$ Bedarf: (α) Wachstum $\boxed{\dot N = \alpha N,\ N(0) = N_0}$ $[\alpha] = 1/\text{Zeit}$

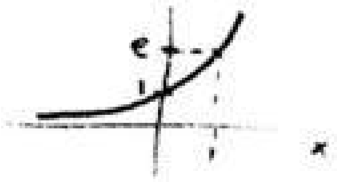
  Ans $N(t) = N_0 f(\alpha t)$; $N_0 f' \cdot \alpha = \alpha N_0 f$, $N_0 f(0) = N_0$

  $\Rightarrow f$ – ER: $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$

  (b) $m\dot v = -m\lambda v$, $v(0) = v_0$

  Ans $v(t) = v_0 f(-\lambda t)$; $\underline{-\lambda v_0} f' = \underline{-\lambda v_0} f$, $f(0) = 1$

- 4 Def: $\exp(x) :=$ Lsg von $\boxed{f'(x) = f(x),\ f(0) = 1}$

- 5 Verlauf:  $f(1) =: e \approx 2.72$

- 6 Funktionale Beziehung

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} =: g(x)\ ,\quad g(0) = 1\ ,\quad g'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$$

$\Rightarrow$ g erfüllt auch $\boxed{\dots}$

$\Rightarrow$ $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

$\Rightarrow$ $\exp(x) = e^x$

《denn: $\exp(\frac{m}{n}) = \exp(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}) = [\exp(\frac{1}{n})]^m = ([\exp(\frac{1}{n})]^n)^{\frac{m}{n}}$

$= [\exp(1)]^{\frac{m}{n}}$ 》

- 7 Ableitung: e^x

- 8 Stammfunktion: e^x

- 9 Dgl. $\partial_x e^x = e^x$, $\partial_x^2 e^{\pm x} = e^{\pm x}$

《 $\ddot{x} = +\omega^2 x$ mit Ansatz $A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$ 》

《 $\dot N = \alpha N - \beta$, $N(0) = N_0$ mit (a) Ansatz (b) [illegible] (c) $N = e^{\alpha t}$,

(d) „direkt" $N(t) = \frac{\beta}{\alpha} + (\text{Lsg} - \dots / \text{Lsg})$

$= \frac{\beta}{\alpha} + (\quad)e^{\alpha t}$

$= \frac{\beta}{\alpha} + (\quad - \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t}$

$= \frac{\beta}{\alpha} + (N_0 - \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t}$ 》

- 10 Reihe: $f = c_0 + c_1 x$ in $(f' = f,\ f(0) = 1)$ einsetzen,

gibt $c_1 = c_0 + c_1 x$, $c_0 = 1$

↳ oh! Brauche auch $+c_2 x^2$ in f!

$c_1 + 2c_2 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

↳ oh! Brauche ... [illegible] Potenzen!

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in $\boxed{f' = f, f(0) = 1}$ einsetzen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad , \quad m = n-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1}$$

$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{n} c_{n-1}$ für $n = 1, 2, \dots$ und $c_0 = 1$

$c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2},\ \dots \quad c_n = \frac{1}{n!}$ mit $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \ (n \geq 1)$
$0! := 1$

also $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$; kann auch als exp-Def nehmen.

die Summe hat $\forall x$ einen endlichen Wert
("die Reihe konvergiert $\forall x$"), denn
gegeb. x, a = natürl. Zahl $\gtrsim x$,

$$\sum \frac{1}{n!} x^n = 1 + \dots + \frac{a^{10a}}{(10a)!} \left[1 + \frac{a}{10a+1} + \frac{a^2}{(10a+1)(10a+2)} + \dots \right]$$

und $[\dots] < 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 1.111\dots$

- $\bullet_{11}$ Werte: z.B. per Reihe

- $\bullet_{12}$ Asymptotik, $x \to \infty$:

$\frac{1}{x^m} e^x \to \infty \quad , \quad x^m e^{-x} \to 0 \quad$ (e^{-x} erschlägt jede Potenz)

e^x als Asymptotik $\boxed{f' = f, f(0) = 1}$ per Computer,

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f(x) = (1+\varepsilon) f(x) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

$$f(x + N\varepsilon) = (1+\varepsilon)^N f(x)$$

$x = 0$: $\quad f(\underbrace{N\varepsilon}) = (1+\varepsilon)^N$

$\hookrightarrow$ nenne dies wieder x; trotz $\varepsilon \to 0$: N beliebig groß

$$f(x) = e^x = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

ist auch e^x-Def; (eher exotisch)

●13 Umkehrfkt:

$$\ln(e^x) = x\,, \quad e^{\ln(x)} = x$$

$$\partial_x \ln(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\ln(xy) = \ln\left(e^{\ln x} e^{\ln y}\right) = \ln\left(e^{\ln x + \ln y}\right) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x=e^u}{=} \ln(e^{-u}) = -u = -\ln(x)$$

$$10^x = \left[e^{\ln(10)}\right]^x = e^{x \underbrace{\ln(10)}_{= 2.3026}}$$

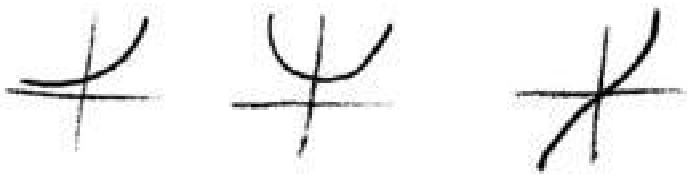
$$\ln(a+b\varepsilon) = \ln\left(a\left[1+\tfrac{b}{a}\varepsilon\right]\right) = \ln(a) + \ln\left(1+\tfrac{b}{a}\varepsilon\right) = \ln(a) + \tfrac{b}{a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

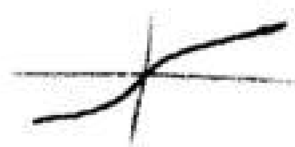
●14 verwandte Fkn

$$e^x = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)}_{\equiv \cosh(x)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)}_{\equiv \sinh(x)}$$

"Area Sinus Hyperbolicus"

$\rightarrow$ Umkehrfkt: $\operatorname{arsinh}(x)$



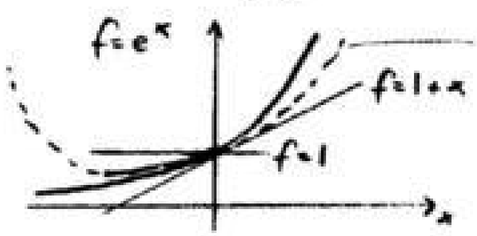


$$\cosh' = \sinh\,, \quad \sinh' = \cosh$$

$$\cosh^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) = 1 + \sinh^2$$

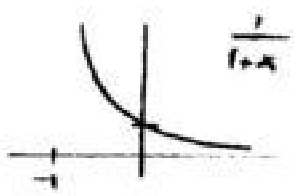
5.3. Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{nicht nur für } e^x\ ?$$

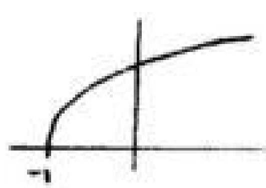


$\rightarrow f = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{(1+x)^2 + 1}{2}$

Strategie funktioniert doch auch bei:



$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots$



$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - x^2 + \ldots$

wenn $f = \Sigma$, dann: "habe $f(x)$ um $x=0$ entwickelt".

funktioniert immer? — fast (bei Physiker-Fkn)

aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius

wann nicht? — an patholog. Stellen.

entwickle nicht $|x|$, $\frac{1}{x}$, e^{-1/x^2} um $x=0$

wozu? — • kann x^n gut differenzieren und aufleiten

• mit Reihenanfängen Probleme vorab vereinfachen (s. Ü 32) $\left(\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin(\varphi) \approx -\frac{g}{\ell} \varphi \right)$

• Resultate abschätzen, Grenzfälle messen (s. Ü 34)

|| • kenne f nicht, habe nur Gl. für f,
setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ an
und bestimme $c_0, c_1, \ldots$ aus der Gl.

(Bsp dazu war oben: e^x)

weiteres Bsp: $f = 1 + xf$ "Dgl. nullter Ordnung"

hat Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zur Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} \quad , m = n-1$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$\Rightarrow c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1}$ für $n \geq 1$ $\Rightarrow$ alle $c_n = 1$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{– geometrische Reihe}, \ |x| < 1}$$

Umgang mit Reihen ("Trickkiste") (|| Verfahrensweisen)

1. Abspalten (hier: Billig-Bsp v. oben; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist eine wilde Fkt)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= 1 + x \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\right]$$

$$= \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^N}_{\overset{!}{=} \frac{1-x^{N+1}}{1-x}} + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

2. algebraische Umformung

$$\sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$
$$1+x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2) x^2 + \dots$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{8} x^2 + \dots$$

3. aus Stammfkt ("Diff. einer Reihe")

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \partial_x \, 2\sqrt{1+x} = 1 - \tfrac{1}{2} x + \tfrac{3}{8} x^2 + \dots$$

4. aus Ableitung ("Int. einer Reihe")

$$\partial_x \left(-\ln(1-x) \right) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$
$$-\ln(1-x) = A + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$
$$x = 0: \quad -\ln(1) = A \quad \Rightarrow A = 0$$
$$\Rightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

5. Add. von Reihen

$$\cosh(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = [e^x]_{\text{gerader Anteil}}$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$
$$\sinh(x) = \partial_x \cosh(x)$$
$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$
$$\tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x) \right) = [\ln(1+x)]_{\text{ungerade}}$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

6. aus Dgl, z. B. cos-Reihe aus $\boxed{f'' = -f,\ f'(0) = 0,\ f(0) = 1}$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(7. Division v. Reihen : $\tan(x) = \frac{s}{c} = (c_0 + c_1 x + \dots)$

$\Rightarrow$ (sin-Reihe) $= (c_0 + c_1 x + \dots)$ (cos-Reihe) , ausmult, $\Rightarrow c_0, c_1, \dots$

8. aus $f(f_u(x)) = x$

9. aus funktionalen Beziehungen)

10. mittels $\boxed{i \cdot i = -1}$, $(ix)^2 = -x^2$, $(ix)^3 = -ix^3$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{Euler'sche Formel}}$$

$\cos(x) = [e^{ix}]_{\text{grade}} = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\cos(ix) = \cosh(x)$

$\sin(x) = \frac{1}{i}[e^{ix}]_{\text{ungerade}} = \frac{1}{2i}(\quad - \quad)$, $\sin(ix) = i \cdot \sinh(x)$

11. Taylor-Reihe

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

$f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2c_2$, $f'''(0) = 2 \cdot 3\, c_3$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$$

((warum nicht gleich? oft verwendet; z.B. f'' zu Ü32(a): ganze Seite))

Bsp: $f = (1+x)^\lambda$, $f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$

$$\underbrace{(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x}_{\text{oft gebraucht}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \dots$$

Zaubertrick zu Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \partial_b^n f(b)\Big|_{b=0} = e^{x\partial_b} f(b)\Big|_{b=0}$$

((generell: $e^{Op.} = 1 + Op. + \frac{1}{2!}Op.^2 + \dots$))

Entwickeln um $x = a$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = e^{(x-a)\partial_b} f(b)\Big|_{b=a}$$

$$f(x+a) = e^{x\partial_b} f(b)\Big|_{b=a} = e^{x\partial_a} f(a)$$

$$f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x) \equiv T_a f(x) \qquad (*)$$

↑ "Translationsoperator" verschiebt Argument um $+a$

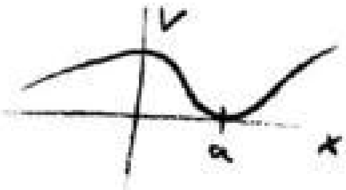
zwei $(*)$-Tests: • $f(x) = x^2$, $(x+a)^2 \stackrel{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots)x^2 = x^2 + 2ax + a^2$, tatsächlich!

• $f(x) = e^x$, $e^{x+a} \stackrel{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots)e^x = e^x(1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots) = e^x e^a$ ✓

Taylor-Anwendung in Physik:

meist nur bei allg. Betrachtungen

wie z.B. bei kleinen Schwingungen von $\overset{\text{Potential}}{V}$-Min. bei $x=a$:

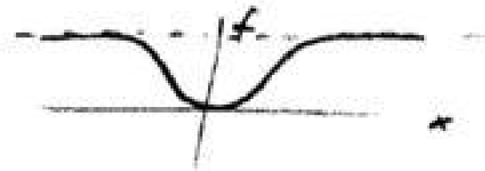


$$V(x) = \underbrace{\cancel{V(a)}}_{\text{egal in } V} + \underbrace{V'(a)}_{=0}(x-a) + \frac{V''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

$$m\ddot{x} = -\partial_x V(x) = -V''(a)(x-a)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{V''(a)}{m}}$$

Warnung $f(x) = e^{-1/x^2}$



$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (\dots) e^{-1/x^2}, \quad f''(0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 0$$

$$\text{Taylor} = 0 + 0 + 0 + \dots \neq f(x)$$

Grund: $x=0$ ist pathologische Stelle

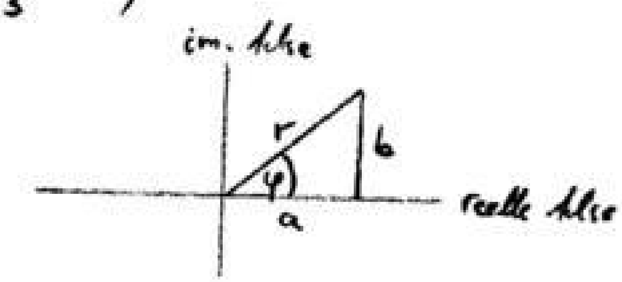
Komplexe Zahlen

sind i enthaltende Bildungen ($=: z$, z.B. $z = \frac{1}{2-3i}$)

können stets auf die Form $z = \underbrace{a}_{Re(z)} + i\underbrace{b}_{Im(z)}$ gebracht werden

$$\left(\text{z.B. } z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2}{13} + i\,\frac{3}{13}\right)$$

können als Pkt in "komplexer Ebene" dargestellt werden:



mit $r = \sqrt{a^2+b^2} =: |z|$

ist $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r e^{i\varphi}$ (φ = "Phase")

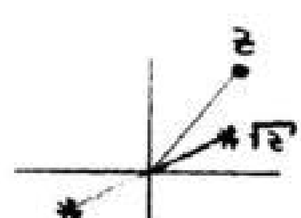
$$z^* := a - ib = r e^{-i\varphi}$$

$$2Re(z) = a+ib + a-ib = z + z^* =: z + c.c.$$

Auch $z = r e^{i(\varphi + 2\pi n)}$ gilt ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

und ist bei Wurzeln wichtig:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi n}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i\left\{\begin{matrix}\varphi/2 \\ \varphi/2 + \pi\end{matrix}\right.} :$$



wegen $-1 = e^{i(\pi + 2\pi n)}$ ist insbes. $\sqrt{-1} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

(($i := \sqrt{-1}$ ist falsch : $-1 = i \cdot i \overset{?}{=} \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = +1$))

5.4 Störungsrechnung

Ein Problem (Gln. für $f(x;\alpha)$) habe einen kleinen Parameter (α).
Kann die Lsg als Reihe in α-Potenzen suchen, d.h.

$$f(x,\alpha) = \underbrace{c_0(x)}_{f^{(0)}(x)} + \underbrace{c_1(x)\,\alpha}_{f^{(1)}(x)} + \underbrace{c_2(x)\,\alpha^2}_{f^{(2)}(x)} + \dots$$

in die f-Gln. einsetzen, um $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots$ zu bestimmen.

zur Notation: wir kennen

$$v(t;\lambda,g) = -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$$ als Lsg. von $\dot v = -g - \lambda v$, $v(0) = v_0$.
(freier Fall + Reibung)

$$= -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)\left(1 - \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \dots\right)$$

$$= \underbrace{v_0 - gt}_{v^{(0)}(t)} \underbrace{- \lambda v_0 t + \frac{g}{2}\lambda t^2}_{v^{(1)}(t)} + O(\lambda^2) \qquad (*)$$

Bsp A $\boxed{\dot v = -g - \lambda v \,,\; v(0) = v_0}$

weiß nichts von e-Fkt
λ sei klein (($[\lambda] = \frac{1}{\text{Zeit}}$, $\lambda \ll \frac{g}{v_0}$))

$v(t) = v^{(0)}(t) + v^{(1)}(t) + \dots$, in ER einsetzen

$\dot v^{(0)} + \dot v^{(1)} = -g - \lambda(v^{(0)} + \dots)$, $v^{(0)}(0) + v^{(1)}(0) = v_0$

"ER$^{(0)}$" $\Rightarrow \boxed{\dot v^{(0)} = -g \,,\; v^{(0)}(0) = v_0} \Rightarrow v^{(0)} = v_0 - gt$

"ER$^{(1)}$" $\Rightarrow \boxed{\dot v^{(1)} = -\lambda v^{(0)} = -\lambda v_0 + \lambda g t \,,\; v^{(1)}(0) = 0} \Rightarrow v^{(1)} = -\lambda v_0 t + \lambda \frac{g}{2} t^2$

$\rightsquigarrow v^{(0)} + v^{(1)} = (*)$. Es funktioniert!

Bsp B $\boxed{\ddot{z} = -\frac{gR^2}{(R+z)^2}, \quad \dot{z}(0) = v_0, \quad z(0) = 0}$

$g = \frac{\gamma M}{R^2}$, $gR^2 = \gamma M$, Wurfexperiment, um Abweichung von $K = -mg$ nachzuweisen

$R \gg \frac{v_0^2}{2g}$

$\frac{1}{R}$ sei klein: $\ddot{z}^{(0)} + \ddot{z}^{(1)} = -g \frac{1}{\left(1 + \frac{z^{(0)}}{R} + \frac{z^{(1)}}{R}\right)^2}$

$\qquad\qquad \to -g\left(1 - 2\frac{z^{(0)}}{R}\right)$

$ER^{(0)} \Rightarrow \boxed{\ddot{z}^{(0)} = -g, \quad \dot{z}^{(0)}(0) = v_0, \quad z^{(0)}(0) = 0} \Rightarrow z^{(0)} = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$

$ER^{(1)} \Rightarrow \boxed{\ddot{z}^{(1)} = 2g\frac{z^{(0)}}{R}, \quad \dot{z}^{(1)}(0) = 0, \quad z^{(1)}(0) = 0} \Rightarrow \dots$

usw.

— Ende §5.4

warum sind Reihenentw. (fast) immer möglich?

- weil wir nur mit Kombinationen aus $x, e^x, i, f_n, f(y), \pm, \cdot, \times, \partial_x, \int$ ... zu arbeiten verstehen
- weil die Natur "weich" ist

— Ende Kap. 5

— Ende Klausur-Stoff