Einf. i. d. Meth. d. theor. Phys. I → EMTP

VS, E6-118 (Mi 16-17)

www.physik.uni-bielefeld.de/~gorbs/emtp

Gratu

warum Physik? – Sterne, Natur, etc; staunen, fragen warum?, Sprache entwickeln

Orga Vorl Mi: 14.15-15.00, 15.10-15.55 (H5)

in Pause: Ü-Blatt holen

Ü-Liste eintragen (nur heute)

vor Vorl: Ü-Lsn in Kasten

Regeln: 50% Ü-Pkte + akt. Mitarbeit ⇒ Ü-Schein

Ü-Schein + (eine) Klausur best. ⇒ Schein

↳ 12.2.07, 26.3.07

Literatur

(*) Schulz: Physik mit Bleistift, Harri Deutsch
6. Aufl. Apr 2006, 388 S., 25e

Fischer/Kaul: Mathematik für Physiker Bd 1, Teubner
5. Aufl. Mrz 2005, 584 S., 38e

Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Teubner
9. Aufl. Jan 2005, 366 S., 30e

Lang/Pucker: Mathematische Methoden der Physik, Spektrum Akad. Verlag
2. Aufl. Aug 2005, 713 S., 40e

Inhalt

Vektoren, Kinematik, Newton, Tensoren,
Funktionen, Integrale, Bewegungsgleichungen

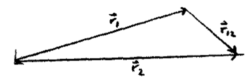
1. Vektoren

Richtungs-Angaben. Pfeile!

Bezugspunkt vereinbaren → Ursprung

Ortsvektor $\vec{r}$: Pfeil Ursprung → Physik

Verschiebungsvektor: Pfeil Punkt → Punkt



Einheiten? Bsp: $\vec{v}$ in m/s? ⇔ Übersetzungsregel (cm auf Papier ⇔ m/s)

Länge des Pfeils := **Betrag**. $|\vec{r}|=r$, $|\vec{v}|=v$, $|\vec{K}|=K$

⇒ Pfeil hat Richtung, Betrag, Anfangspunkt

Bsp: Ball hat bei $\vec{r}$ die Geschw. $\vec{v}$

Bsp: Meeresströmung $\vec{v}(\vec{r})$

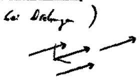
Bsp: ~~Gravitations~~-Feld der Erde

(später: Kap. 4)

> (vorläufige) Def: Vektor
>
> Vektoren sind Pfeile bzgl. Betrag und Richtung, die mit einer Zahl zu multiplizieren und die zu addieren physikalisch sinnvoll ist.

(≠ Mathematik-Vektor ... Physik-Pfeil real, Verhalten bei Drehungen)

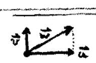
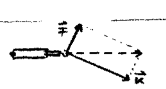
1. Def-Zeile: Vektor ≙ Gesamtheit der Pfeile mit ..
kann Repräsentanten wählen



2. Def-Zeile: 1,7 · ↗ = ↗, −1 · ↗ = ↙ etc anschaulich klar
insbes: **Einheitsvektor** $\frac{1}{a}\cdot\vec{a}=\vec{e}$, $|\vec{e}|=1$; $\vec{a}=a\vec{e}$

3. Def-Zeile: (s. Bild oben) $\vec{r}_1+\vec{r}_{12}=\vec{r}_2$
geht mit Vektoren gleicher Dimension (Übersetzungsregel)
Reihenfolge egal: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$
$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ **Nullvektor**

"physikalisch sinnvoll"? → verstehe am Bsp.

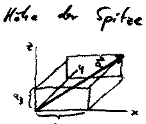
Bsp		Vektor?
Geschwindigkeiten.	Mult. ✓ Add.? → Fluss  $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$	JA
Kräfte.	→ Federwaage 	JA
Drehungen.	Rechte-Hand-Regel: Daumen ≙ Drehachse, Finger ≙ Drehrichtung; Betrag ≙ Winkel. Test: ↑ + ← $\stackrel{?}{\neq}$ ← + ↑	NEIN

bisher: Vektor ≙ Pfeil. Addition ≙ aneinander ansetzen.

Vereinfachung ?! (faul ...)

Vektor $\vec{a}$ gegeben. Wähle Repräsentant ab Ursprung.
Messe Höhe der Spitze → a_3.

→ **Komponenten**
$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$



Systematik: $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{K}=(K_1,K_2,K_3)$
$\vec{r}=(x,y,z)$ ← ausnahmsweise

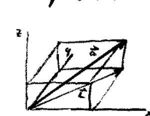
alle 3 Komp. haben gleiche Dimension, $[a_1]=[a_2]=[a_3]=[a]=[\vec{a}]$

Bsp: $[v_3]=$ Länge/Zeit $=$ m/s, $[y]=$ Länge $=$ m

$\vec{v}=(1\,\mathrm{m/s},\,0,\,2\,\mathrm{m/s})=(1,0,2)\,\mathrm{m/s}$

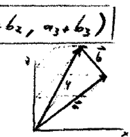
obige Vektor-Eigenschaften in Komponenten-Sprache?

Betrag: $\boxed{|\vec{a}|=a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$
wegen Pythagoras
$a^2=a_3^2+L^2$, $L^2=a_1^2+a_2^2$

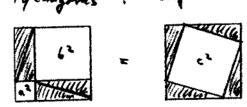


Mult.: $\boxed{c\vec{a}=(ca_1,ca_2,ca_3)}$
anschaulich klar: Schatten-Verdopplung! (c=2)

Add.: $\boxed{\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\,a_2+b_2,\,a_3+b_3)}$
anschaulich
(für eine Komp.)
$z \,\hat{=}\, a_3+b_3$ ✓



Pythagoras? einfach! geometr. Beweis:
(mehr Beweise: → s. Übg.)



Vektoren $\vec{a}$. $(=\vec{a})$

bisher: $|\vec{a}|$, $c\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$

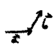
heute: weitere Verknüpfungen von 2 Vektoren

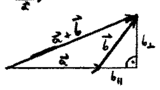
$\hookrightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}$, $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}$, $\underline{\vec{a}\times\vec{b}}$, $\vec{a}\circ\vec{b}$, "$a_\sim b$"

Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$

Motivation

(M1)  $\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)

 $\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 2\cdot \text{Rest} =: 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ definiert die rechte Seite der Gleichung

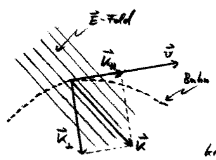


haben $\vec{b}$ zusammengesetzt

$\vec{b} = \vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel$ parallel zu $\vec{a}$

"Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$"

also: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(a+b_\parallel)^2 + b_\perp^2}_{\text{Pythagoras}} - a^2 - b_\perp^2 - b_\parallel^2\Big] = a b_\parallel$

(M2) 

geladenes Teilchen (Ladung q) im elektrischen Feld $\vec{E}$.

$\vec{K} = q\vec{E}$

$= \vec{K}_\perp + \vec{K}_\parallel$ parallel zu $\vec{v}$; beschleunigt

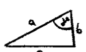
krümmt Bahn

also macht auch hier eine Definition $K_\parallel =: \frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{K}$ Sinn.

Definition

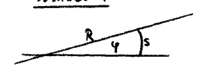
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} := a b_\parallel = a_\parallel b = a b \cos(\varphi)}$$

$\hookrightarrow$ Gleichberechtigung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ $\rightarrow$ Definiert $\cos(\varphi)$

((NB  "Kosinussatz" $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi)$

folgt aus Vektorrechnung: $= (\vec{a}-\vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$))

Winkel?



Maß der "Öffnung" zweier Geraden

offensichtlich ist R proportional zu s.

Definition $\boxed{\text{Winkel } \varphi := s/R}$ ((dimensionslos: Länge/Länge))

rechter Winkel? 90°? $\pi/2$!

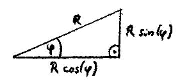
nachmessen:  , $s/R = 3.14159\ldots =: \pi$

Raumwinkel?

Maß für "Öffnung" eines Kegels, mit Stück Kugelfläche S als Abschluß. $2\cdot R \to 4\cdot S$, also:

Def $\boxed{\text{Raumwinkel } \Omega := S/R^2}$ ((dimensionslos))

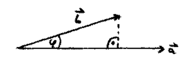
Sinus? Kosinus?



$\cos(\varphi) := \dfrac{\text{Kantenlänge am Winkel } \varphi}{R}$

$\sin(\varphi) := \dfrac{\text{Kantenlänge gegenüber } \varphi}{R}$

$\Rightarrow$ Pythagoras: $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$

verstehen jetzt auch das letzte Gleichheitszeichen der Skalarprodukt-Def:  $b_\parallel = b\cos(\varphi)$

Formelsammlung zum Skalarprodukt

"genau dann, wenn"

$\vec{a}^2 := \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$, $|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}^2}$, $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab$

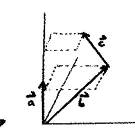
$|\vec{a}+\vec{b}| \leq a+b$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq ab$ (Schwarz'sche Ungleichung)

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

(∗) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

$r_{12} = r_{21} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}$



alles anschaulich klar; z.B. Skizze $\rightarrow$ liefert $(\vec{b}+\vec{c})_\parallel = b_\parallel + c_\parallel$. Multipliziere mit a $\overset{\text{es folgt}}{\Rightarrow}$ (∗)

Vereinbarung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\vec{b}$

brauche manchmal Klammern: $\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$!

nie durch einen Vektor teilen. "$\cancel{1/\vec{a}}$" nicht def.

in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl, $\overrightarrow{\text{Vektor}} = \overrightarrow{\text{Vektor}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ in Komponenten

brauchen Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen:

$\vec{e}_1 = (1,0,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0)$; $\vec{e}_3 = (0,0,1)$

dann ist $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

und

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)\\ &= a_1b_1\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + a_2b_1\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + a_3b_1\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1\\ &\quad + a_1b_2\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + a_2b_2\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + a_3b_2\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2\\ &\quad + a_1b_3\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + a_2b_3\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + a_3b_3\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Einstein'sche Summenkonvention

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j =: a_j b_j$

falls zwei gleiche Indizes vorkommen $\rightarrow$ summieren

obige Herleitung nun kurz: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_j\vec{e}_j\cdot b_k\vec{e}_k = a_j b_k \delta_{jk} = a_j b_j$

mit <u>Kronecker-Symbol</u> $\delta_{jk} := \vec{e}_j\cdot\vec{e}_k = \begin{cases}1 & \text{für } j=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

Anwendungs-Beispiele:

$a_j a_j = a^2$

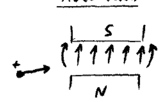
$c_k a_j a_\ell b_k \delta_{j\ell} = a^2(\vec{c}\cdot\vec{b})$

$\delta_{j\ell}\delta_{\ell k} = \delta_{jk}$, $\delta_{j\ell}\delta_{\ell m}\delta_{mn}\delta_{nk} = \delta_{jk}$

$\delta_{jj} = 3$, $\delta_{j\ell}\delta_{\ell j}\delta_{mn}\delta_{nm} = 9$

Kreuzprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$

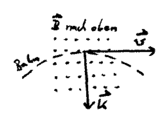
Motivation



el. geladenes Teilchen (Ladung q) fliegt durch Magnetfeld $\vec{B}$

Experiment $\Rightarrow$ $\vec{K}\perp\vec{v}$, $\vec{K}\perp\vec{B}$

und $\vec{K}$ proportional q und $vB_\perp = v_\perp B$ Komp. senkrecht zu $\vec{v}$



$\Rightarrow$ erfinde "Kreuzprodukt" mit den genannten Eigenschaften

$\vec{K} =: q(\vec{v}\times\vec{B})$

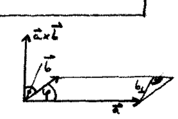
(Anwendung? DESY, CERN, .. !)

Definition

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} := \begin{pmatrix}\text{Fläche des von}\\ \vec{a},\vec{b}\text{ aufgespannten}\\ \text{Parallelogramms}\end{pmatrix}\cdot\vec{e} = -\vec{b}\times\vec{a} = \vec{e}\,ab\sin(\varphi)}$$

wobei $\vec{e}$ Einheitsvektor $\perp\vec{a}$ und $\perp\vec{b}$

$\vec{a},\vec{b},\vec{e}$ bilden ein Rechtssystem



Formelsammlung zum Kreuzprodukt

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp\times\vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{a} = 0$, $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab_\perp = a_\perp b$

$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$

$a\perp\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = ab$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

alles anschaulich klar; s. Ü.

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})}$$ (Beweis s. Ü.)

(kommt sehr häufig vor)

Zerlegung $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$ oft nützlich

muß angeben, in Bezug auf welchen Vektor $\parallel$ und $\perp$ gilt:

z.B. in Bezug auf Einheitsvektor $\vec{e}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_\parallel = (\vec{a}\vec{e})\vec{e}$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a}(\vec{e}\vec{e}) - \vec{e}(\vec{a}\vec{e}) \overset{\text{BAC-CAB}}{=} \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ in Komponenten

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad ; \quad \vec{e}_1\times\vec{e}_1 = 0 \text{ etc.}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{a}\times\vec{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}\times\vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2 \,,\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,,\, a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

Indizes: j-te Komponente ergibt sich durch $\cdot\vec{e}_j$ auf beiden Seiten

$$(\vec{a}\times\vec{b})_j = a_k b_l \, \vec{e}_j\cdot(\vec{e}_k\times\vec{e}_l) =: \varepsilon_{jkl}\, a_k b_l$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_{jkl} := \vec{e}_j\cdot(\vec{e}_k\times\vec{e}_l) = \begin{cases} 0 & \text{wenn 2 Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{wenn } j,k,l \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } j,k,l \text{ antizyklisch} \end{cases}$$

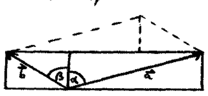
"total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe"

((zyklisch: 1,2,3 ; 2,3,1 ; 3,1,2
anti z.: 1,3,2 ; 2,1,3 ; 3,2,1))

Trigonomie ?

Sinussatz, Kosinussatz etc
sind einfache Folgerungen der Vektorrechnung. (s. S. 5)

weiteres Bsp:



Fläche großes Rechteck $= |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin(\alpha+\beta)$

$\overset{!}{=}$ linkes + rechtes Rechteck

$= b\sin(\beta)\; a\cos(\alpha) + a\sin(\alpha)\; b\cos(\beta)$

$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) .$$

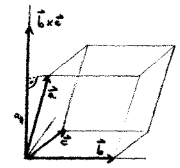
noch ein doppeltes Produkt (neben $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$):

Spatprodukt

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_\parallel\, |\vec{b}\times\vec{c}|$$

$$= \begin{pmatrix}\text{Volumen des Parallelepipeds} \\ \text{mit Kanten } a,b,c\end{pmatrix} \cdot \frac{a_\parallel}{|a_\parallel|}$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$



in Komponenten

$$= a_1 \cdot b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2$$
$$+ a_2 \cdot b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3$$
$$+ a_3 \cdot b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$(= \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k)$$

ordnet 9 Zahlen eine einzige Zahl zu

$\hat{=}$ "Determinante"

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Sarrus' Regel
(nur 3x3 und 2x2)

"Matrix" ; s. Kap. 4

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{jk})$$

Vektorgleichungen

schränken $\vec{r}$'s so ein, daß Lsn geometr. Objekt bilden ...

Bsp. $\vec{r}\cdot\vec{e}_3 = 0$. hat (∞ viele) Lsn: $\vec{r} = (x, y, 0)$

$\Rightarrow$ ist Gleichung der xy-Ebene

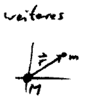
$\vec{r}\cdot\vec{e} = 0$. Ebene durch Ursprung $\perp \vec{e}$

$|\vec{r}| = R$. Kugel mit Radius R

$|\vec{r} - \vec{r}_0| = R$. " , Mitte bei $\vec{r}_0$

Translation: Ursprung-bezogene ($\vec{r}$'s enthaltende)
Physik wird $\vec{r}_0$-bezogen durch $\vec{r} \to \vec{r} - \vec{r}_0$

weiteres Bsp zur Translation: Grav.-Kraft



$$\vec{K} = -\frac{\gamma m M}{r^2}\vec{e}_r$$

$\Rightarrow$ Stern (M) bei $\vec{r}_0$ hat $\vec{K} = -\dfrac{\gamma m M}{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}\,\dfrac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

LK (Linearkombination)

c_1 Objekt$_1$ + c_2 Objekt$_2$ + .. ist LK aus Obj.

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_3\vec{e}_3$ ist LK aus $\vec{e}$'s

linear in = hoch eins von

$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c}$ ist LK aus $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

VONS (vollst. Orthonormalsystem)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{3 Vektoren } \vec{f}_j \text{ bilden VONS (Dreibein)} \\ \Leftrightarrow \quad \vec{f}_j\cdot\vec{f}_k = \delta_{jk} \quad \text{und} \quad \vec{f}_1\cdot(\vec{f}_2\times\vec{f}_3) = +1 \end{array}}$$

d.h. Rechtssystem.

"vollständig", weil jeder Vektor nach $\vec{f}_j$ entwickelbar:

$$\vec{a} = a_1'\vec{f}_1 + a_2'\vec{f}_2 + a_3'\vec{f}_3$$

$\vec{a}$ bekannt, erhalte $a_1' = \vec{f}_1\cdot\vec{a}$ etc.

$\vec{a},\vec{b}$ "linear unabhängig" $\Leftrightarrow$ aus $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{0}$ folgt $c_1 = c_2 = 0$

3 linear unabh. V. spannen den 3D V.raum auf.

— Ende Kap. 1 —

haben Sprache ~~gelernt~~ Vokabeln (Vektoren, Operationen)
bisher alles statisch (unbewegt)
$\Rightarrow$ jetzt kommt Schwung in die Physik: Kap. 2

2. Kinematik

Kino, Bilderfolge, bewegte Pfeile

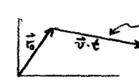
$$\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t)) = \text{Vektorfunktion}$$

Zeit t , z.B. $\vec{r}(t)$, $\vec{K}(t)$, $\vec{v}(t)$

((Funktionen: Kap. 5 . hier nur einfache , x, x^2, $\frac{x}{1+x^2}$, $\cos(x)$, $\sin(x)$))

Raumkurven kennenlernen über Bsp.

(A) Bewegung mit $\vec{v} = \text{const}_t$.
$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ bekannt.



$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$
$$= (x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t, \dots)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

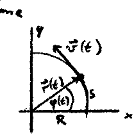
Parameterdarstellung einer Geraden.
Parameter t läuft von $-\infty$ nach ∞

(B) Kreisbewegung mit $v = \text{const}_t$ in xy Ebene
ab $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$

$$s(t) = vt$$

$$\varphi(t) = s(t)/R = \frac{v}{R}t =: \omega t \quad \text{"Kreisfrequenz"}$$

$$\left(\omega = \frac{v}{R} \;,\; [\omega] = 1/\text{Zeit}\right)$$



$$\vec{r}(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$$

Umlaufzeit = Periode = T

zu $t = T$ wird $\varphi = 2\pi = \omega T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$

((Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$. "Frequenz" $= \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ bei uns selten))

$\vec{v}(t)$ rein geometrisch: kenne v, suche $\vec{e}_v$

$$\vec{v}(t) = v\vec{e}_v = v\cdot\left(\vec{e}_3\times\frac{\vec{r}(t)}{R}\right) = v\,(0,0,1)\times(c,s,0)$$

$$= R\omega\,(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)$$

(C) Schraubenlinie $\vec r(t) = \left(R\cos(\omega t),\ R\sin(\omega t),\ v_3 t\right)$

(D) Holzschraube $\vec r(t) = \left(R(t)\cos(\omega t),\ R(t)\sin(\omega t),\ v_3 t\right)$

$\}\, v_3 t_0$ mit $R(t) = R\left(1 - t/t_0\right)$, $0 < t < t_0$

(E) Ellipse $\vec r(t) = \left(a\cos(\omega t),\ b\sin(\omega t),\ 0\right)$

(F) $\omega t =: \tau$ $\vec r = \left(2R\cos(\tau),\ R\sin(2\tau),\ 0\right)$

(G) spielen; e.g. $\oint$

<u>Winkelgeschwindigkeit</u>

Kreis (s. (B) oben) $\vec v_{Kreis} = R\omega\left(\vec e_3 \times \vec e_r\right) = \underbrace{(\omega \vec e_3)}_{=:\vec\omega} \times \vec r$

$\varphi = \omega t$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

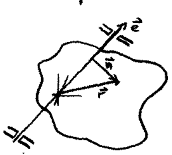
cave $\omega \neq w$ (omega, w)

allgemein (es muß nur eine momentane Achse $\vec e$ geben)

$\vec\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec e(t)$

((Erde, $\omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$, wohin zeigt $\vec\omega$?))

starrer Körper (z.B. gelagert), Ursprung auf Achse, $\vec v = ?$ eines Punktes bei $\vec r$:



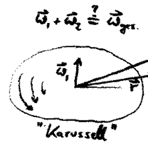
$\vec v = v\cdot\left(\vec e \times \frac{\vec r_\perp}{r_\perp}\right) = \frac{v}{r_\perp}\left(\vec e \times \vec r_\perp\right)$

$\boxed{\vec v = \vec\omega \times \vec r}$

Ist $\vec\omega$ Vektor? (→ Kap. 1: endl. Drehungen nicht!)

$\lambda\cdot\vec\omega$: kein Problem

$\vec\omega_1 + \vec\omega_2 \stackrel{?}{=} \vec\omega_{ges.}$ (bei Achsen-Kreuzung im Ursprung) JA:



"Karussell"

ohne Motor: $\vec u = \vec\omega_1 \times \vec r$

ohne Kar.: $\vec v = \vec\omega_2 \times \vec r$

$\vec u + \vec v = (\vec\omega_1 + \vec\omega_2) \times \vec r$

$\vec w = \vec\omega_{ges.} \times \vec r$ $\forall \vec r$ "für alle"

Ein (irgendwie durch den Raum eiernder) starrer Körper hat stets ein $\vec\omega$, denn 3 Punkte legen seine Position fest, und es ist

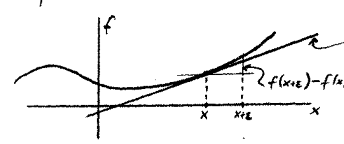
$$\vec\omega = \frac{(\vec v_1 - \vec v_3)\times(\vec v_1 - \vec v_2)}{(\vec v_1 - \vec v_3)\cdot(\vec r_1 - \vec r_2)}$$ wegen bac-cab.

((Zähler $= (\vec v_1 - \vec v_3) \times \left(\vec\omega \times (\vec r_1 - \vec r_2)\right)$

$= \vec\omega\cdot\underbrace{\left((\vec v_1 - \vec v_3)\cdot(\vec r_1 - \vec r_2)\right)}_{= \text{Nenner}} - (\vec r_1 - \vec r_2)\underbrace{\left((\vec v_1 - \vec v_3)\cdot\vec\omega\right)}_{=0}$))

<u>Differenzieren</u> (Ableitung bilden)

einfach. Sie können es schon: malen. Tangente, Anstieg.



$y = ax + b$

$a = $ Anstieg $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Def. $\boxed{\text{Ableitung von } f(x) \text{ bei } x = f'(x) := \text{Anstieg der Kurve bei } x}$

per Rechnung: $\boxed{f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}}$ "Differentialquotient"

$\boxed{f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f(x)}$

"Limes" $\hat=$ Grenzwert

verstehen? Wie immer mit Bsp. (bitte $\lim_{\varepsilon\to 0}$ hinzudenken)

(A) $\partial_x x^3 = \frac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\cancel{x^3} + 3x^2\varepsilon + \underbrace{3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3}_{=\mathcal O(\varepsilon^2)} - \cancel{x^3}\right) = 3x^2$

nützliche Notation: $\mathcal O(\eta) :=$ etwas $\sim \eta$ bei $\eta\to 0$ gegen Null gehendes

(B) $\partial_x \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \frac{\cancel{x}+\varepsilon - \cancel{x}}{\varepsilon\left(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(C) $\partial_x \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x+\varepsilon} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{x - (x+\varepsilon)}{(x+\varepsilon)x} = -\frac{1}{x^2}$

(D) $\partial_x x^{n/m} = \frac{1}{\varepsilon}\left((x+\varepsilon)^{n/m} - x^{n/m}\right)$

$=: x^{n/m} + a\varepsilon + \mathcal O(\varepsilon^2)$, $(x+\varepsilon)^n = \left(x^{n/m} + a\varepsilon + \mathcal O(\varepsilon^2)\right)^m$,

$x^n + nx^{n-1}\varepsilon + \mathcal O(\varepsilon^2) = x^n + m\,x^{\frac{n}{m}(m-1)} a\varepsilon + \mathcal O(\varepsilon^2)$

$\Rightarrow a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

$= a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

bisher: $n, m = 1, 2, 3, \ldots$; genauso für $n = -1, -2, \ldots$

kann jede reelle Zahl λ bel. genau durch $\frac{n}{m}$ approximieren

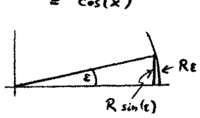
$\Rightarrow$ allgemein $\partial_x x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}$

(E) $\partial_x \sin(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)\right)$

s. Kap. 1 Skript S. 9

$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\sin(x)\underbrace{\cos(\varepsilon)}_{(**)\ 1+\mathcal O(\varepsilon^2)} + \cos(x)\underbrace{\sin(\varepsilon)}_{(*)\ \varepsilon+\mathcal O(\varepsilon^3)} - \sin(x)\right)$

$= \cos(x)$

(*) 

(**) $\cos(\varepsilon) = \sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon)}$

$\to \sqrt{1 - \varepsilon^2 + \ldots} = 1 - c\varepsilon^2 + \ldots$

quadr.: $1 - \varepsilon^2 + \ldots = 1 - 2c\varepsilon^2 + \ldots$

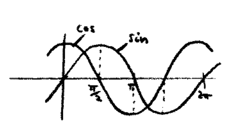
$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

(F) $\partial_x \cos(x) = \partial_x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\partial_x \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$

(***) $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



(G) $\partial_x\, g\cdot h = g'h + h'g$ "Produktregel"

(H) $\partial_x f(g(x)) = f'(g)\cdot g'$ "Kettenregel"

(I) $\partial_x f(g, h) = f'^{g} g' + f'^{h} h'$

aus (I) folgen (H) und (G). (I)-Herleitung genügt:

$\partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}\left[f\left(g(x+\varepsilon), h(x+\varepsilon)\right) - f\left(g(x), h(x)\right)\right]$ with $g(x+\varepsilon) = g(x) + \varepsilon g'(x)$

$= \frac{1}{\varepsilon}\left[f(g+\varepsilon g', h+\varepsilon h') - f(g, h+\varepsilon h') + f(g, h+\varepsilon h') - f(g, h)\right]$

$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\varepsilon g'\cdot f'^{g}(g, h+\varepsilon h') + \varepsilon h' f'^{h}(g, h)\right] = (I)$

Bsp (I) gilt natürlich entsprechend auch für 3 Funktionen.

schöne Anwendung: "Gradient"

Maikäfer fliegt mit $\vec r(t)$ durch Abendluft mit Temp. $T(\vec r)$

Welche Temp.-Änderung pro Zeit hat er auszuhalten?

$\partial_t T\left(x(t), y(t), z(t)\right) = \dot x\,\partial_x T + \dot y\,\partial_y T + \dot z\,\partial_z T$ $(\partial_t z =: \dot z)$

$= \dot{\vec r}\cdot\left(\partial_x T, \partial_y T, \partial_z T\right)$ sieht aus wie Skalarprod.

$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\,T =: \text{grad}\, T =: \vec\nabla T$

$= \dot{\vec r}\cdot\vec\nabla T$, $\vec\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$

differenzieren einer Vektorfunktion?

simpel: $\partial_t \vec a(t) := \frac{d\vec a}{dt} = \left(\dot a_1, \dot a_2, \dot a_3\right)$

((wie bei $\vec v = \dot{\vec r} = (\dot x, \dot y, \dot z)$))

übrigens ist $\overrightarrow{\text{Beschleunigung}} := \partial_t \vec v(t) = (\ddot x, \ddot y, \ddot z)$

Gefahr: $|\dot{\vec r}| = v \neq \dot r = \partial_t |\vec r|$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\dot r = \frac{1}{2\sqrt{\ldots}}\left(2x\dot x + 2y\dot y + 2z\dot z\right) = \frac{1}{\sqrt{\ldots}}\,\vec r\cdot\dot{\vec r} = \frac{\vec r}{r}\cdot\vec v = \vec e_r\cdot\vec v = v_\parallel \neq v$

((z.B. Kreisbewegung von S. 12: $|\vec r| = R_{cr}$, $\dot r = 0$))

Rechenregeln (mit (I) leicht zu verstehen)

$$\partial_t \begin{cases} \vec a + \vec b \\ \lambda\vec a \\ \vec a\cdot\vec b \\ \vec a\times\vec b \end{cases} = \begin{cases} \dot{\vec a} + \dot{\vec b} \\ \dot\lambda\vec a + \lambda\dot{\vec a} \\ \dot{\vec a}\cdot\vec b + \vec a\cdot\dot{\vec b} \\ \dot{\vec a}\times\vec b + \vec a\times\dot{\vec b} \end{cases}$$

Linearer Operator

Op Element = anderes Element; $\lambda\ \nearrow = \nearrow$; $\vec a\times\vec m = \vec m$; $\partial_x f = f'(x)$

A ist ein linearer Op. $\Leftrightarrow A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$

$Af := \frac{1}{f}$ ist nicht lin., denn $\frac{1}{\alpha f + \beta g} \neq \alpha\frac{1}{f} + \beta\frac{1}{g}$

$A^2 := AA$, $\partial_x^3 f = f'''$, etc.

3. Newton 1643–1727

bisher: Kap 1, Vektoren, Vokabeln gelernt, statisches Weltbild ("Photo")
Kap 2, Kinematik, $\vec r(t)$, auf vorgegebenen Kurven, "Kino"

in der Natur: $\vec r(t)$ weiß von alleine, wie er sich zu verändern hat!
→ Zukunft vorhersagen? Wahrsagen? Physik!

Physik: Stück Natur verstehen = kann ausrechnen, was sie tun wird.
↳ wir sind gut vorbereitet: $\vec r(t)$, ∂_t, …

Experiment(e) → Prinzipien der Natur – Mathematik ↓ Vorhersage aller Experimente } Theor. Physik

in diesem Kap.: Newton'sche Mechanik eines Massenpunktes

Es gibt Teilchen. T. wechselwirken
(stark, em, schwach, Gravi
10^{-15}m, $\sim r^{-2}$, 10^{-18}m, $\sim r^{-2}$
1, $1/137$, 10^{-5}, 10^{-40}
klumpend, wichtig, kurzreichweitig, aber Erde aus 10^{50} T.)

Die Wechselwirkung zw. 2 T. hängt von Eigenschaftspaaren (m, q, color, …) ab
Schlechte Apparate sehen T.-Klumpen als "Massenpkte"
Ww. zw. Massenpkten = $\sum$ (elementare Ww.)
(( ))

Für die Mechanik besteht die Welt aus Massenpunkten (♭),
welche man numerieren kann (♭),
und sie behandelt deren Bewegung zu gegebenen Kräften
(ist darum nur "halbe" Theorie).

Das oberste Prinzip ("first principle") der Mechanik ist die Bewegungsgleichung

$$\boxed{m\ddot{\vec r}(t) = \vec K(\vec r(t), \dot{\vec r}(t), t)}$$

"Antwort" "Ursache"

z.B. $= q(\vec E + \vec v \times \vec B)$
oder $= \sum_j (-\gamma m M_j) \frac{\vec r - \vec r_j}{|\vec r - \vec r_j|^3}$
oder $= -\vec v f(v)$ (Reibung)
oder $= \vec e_{\text{von m nach Halter}} \cdot \kappa (r_{m\text{-}H} - \ell)$
Feder-Daten

Die Bew.-gl. ist ein Axiom
braucht "actio = reactio" nicht
erklärt "Inertialsystem" (= in denen sie gilt)
definiert m, $\vec K$, $\vec E$, $\vec B$, q
und ermöglicht $\vec r(t)$-Bestimmung!
(braucht keine anderen Überlegungen, keine Fliehkräfte, ..)

Vorhersage

$\vec r(0)$ und $\vec v(0)$ bekannt ⇒ $\vec r(t)$ wegen
Bew.gl.-Zerlegung in $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec r} = \vec v \\ \dot{\vec v} = \frac{1}{m}\vec K \end{array} \right.$ und

$\vec r(t+dt) = \vec r(t) + dt\, \vec v(t)$
$\vec v(t+dt) = \vec v(t) + dt\, \frac{1}{m} \vec K(\vec r(t), \vec v(t), t)$

(3D: 6 Anfangsdaten; 2D: 4; 1D: 2)
Lösung z.B. per Computer (numerisch; genähert),
am besten aber per Rechnung.

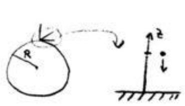
(("System gekoppelter Differentialgln. zweiter Ordnung"
gee… können froh sein über jeden lösbaren Spezialfall!))

Freier Fall

$\vec K_{\text{auf } m} = -\frac{\gamma m M}{|\vec r - \vec r_0|^2} \frac{\vec r - \vec r_0}{|\times|}$

$\vec r_0 = (0,0,-R)$; $\vec r - \vec r_0 \approx -\vec r_0$, $\frac{\vec r - \vec r_0}{|\times|} \approx \vec e_3$

$\vec K = -m \left(\frac{\gamma M}{R^2}\right) \vec e_3 =: -mg\vec e_3$



$\boxed{\ddot z = -g, \quad \dot z(0) = 0, \quad z(0) = h}$ (1D, 2 Anfangsdaten ✓)

ER ⇒ Ansatz erlaubt. Lsg ~
"Eindeutigkeitsrahmen"; s. Ü 14,15
$z(t) = A + Bt + Ct^2 + D\cos(\omega t)$

- Ansatz (darf unzureichend sein)
- bilde $\dot z$, $\ddot z$, erfülle Bew.Gl. identisch in t (hier: 5 Param.)
- setze in Anf.bed. ein, notiere Resultat

$\dot z = B + 2Ct - D\omega \sin(\omega t)$
$\ddot z = 2C - D\omega^2 \cos(\omega t) \overset{!}{=} -g$ ⇒ $D = 0$, $C = -\frac{g}{2}$
$\dot z(0) = B \overset{!}{=} 0$
$z(0) = A = h$, also $\underline{z = h - \frac{g}{2}t^2}$

es gibt nur eine Lsg, also ist sie es.
(hätten wir C-Term vergessen, wäre Bew.Gl. nicht ∀ t erfüllbar gewesen)

"Aufleiten" ($\dot z = -gt + B$, $\dot z(0) = B \overset{!}{=} 0$
$z = -\frac{g}{2}t^2 + Bt + A$, $z(0) = A \overset{!}{=} h$)
geht nicht immer; z.B. 3-Körper-Problem,

1D harmonischer Oszillator

$K_1 = -\kappa x$

$\boxed{\ddot x = -\frac{\kappa}{m} x, \quad \dot x(0) = v_0, \quad x(0) = 0}$ (($+B\cos(\omega_0 t)$, braucht nicht wg. $x(0) \overset{!}{=} 0$))

Ansatz: $x = A\sin(\omega t)$ ← bilde $\dot x$, $\ddot x$, erfülle $\dot x(0)$, $x(0)$

⇒ $x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\, t\right)$

behandle nun (möglichst) allg. Folgerungen aus $m\ddot{\vec r} = \vec K(\vec r, \dot{\vec r}, t)$

$\vec P$ und $\vec L$

"Wucht" = Impuls = $\vec p := m\vec v$

wenn zu beschleunigende Masse const$_t$, dann ((sonst: s. Raketengl. ↓))
$m\ddot{\vec r} = \partial_t m\dot{\vec r} = \dot{\vec p} = \vec K$

Impulserhaltung: $\dot{\vec p} = 0 \Leftrightarrow \vec K = 0$ (langweilig!)

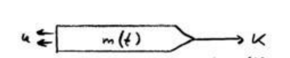
mehrere Teilchen, Gesamtimpuls $\vec P = \sum_{a=1}^{N} \vec p_a$

$\dot{\vec P} = \sum_a \dot{\vec p}_a = \sum_a m_a \ddot{\vec r}_a = \sum_a \vec K_{\text{auf } a}$

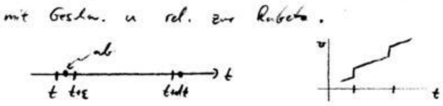
$\vec K_{\text{auf } a} = \vec K_{\text{auf } a}^{\text{von außen}} + \vec K_{\text{auf } a}^{\text{von } b}$

wenn $\sum_a \vec K_a^{\text{v. außen}} = \vec 0$ und $a \overset{ww}{\neq} r$, dann
$\sum_a \vec K_{\text{auf } a}^{\text{von } b} \approx \vec 0$ und $\dot{\vec P} = \vec 0$

Raketengl.:



Alle dt "platzt" ein dm nach links ab,
mit Geschw. u rel. zur Rakete.



$p_{\text{vor}} = p_{\text{nach}}$: $m(t)v(t) = [m(t) - dm]\, v(t+\varepsilon) + dm\, [v(t) - u]$

$\Leftrightarrow 0 = m(t)\,[v(t+\varepsilon) - v(t)] - dm\, u - \cancel{dm\,[v(t+\varepsilon) - v(t)]}^{\approx 0}$ quadr. klein!

Beschl. während dt: $v(t+dt) = v(t+\varepsilon) + dt\, \frac{1}{m} K$

eliminiere $v(t+\varepsilon)$: $0 \overset{!}{=} m(t)\left[v(t+dt) - dt\, \frac{1}{m} K - v(t)\right] - dm\, u$

mal $1/dt$: $0 = m(t)\left[\frac{v(t+dt) - v(t)}{dt} - \frac{1}{m} K\right] - \frac{dm}{dt} u$

⇒ $\underline{m\dot v + \dot m u = K}$ (lösen? später mal..)

"Drehwucht" = Drehimpuls = $\vec L := \vec r \times \vec p = m\vec r \times \vec v = m\vec r \times \vec v_\perp$

$\vec L = \vec e_3\, r m v_\perp = m\vec r \times \vec v_\perp = m\vec r \times \vec v$. (er Teilchen hat $\vec L$ auch ohne Stange) $\vec L$ ist vom Ursprung abh.!

$\partial_t \vec L = m\dot{\vec r}\times\vec v + m\vec r \times \dot{\vec v} = 0 + \vec r \times \vec K$ "Drehmoment" (allg., egal wo Ursprung ist)

wenn $\vec K \sim \vec r$ (oder $\vec r = 0$, oder $\vec K = 0$) ("Zentralkraft": $\vec K = K(\vec r)\frac{\vec r}{r}$), dann $\dot{\vec L} = 0$, d.h. $\vec L = \mathrm{const}_t$

"Drehimpulserhaltung" für 1 T. ((s. auch Ü5))

Flächensatz (Kepler 1571–1630, Newton 1643–1727)

Planet (m) um Sonne (= Ursprung)

$\vec L$ behält Richtung (m bleibt in Ebene $\perp \vec L$) und Betrag

$\mathrm{const}_t = \frac{1}{2m}|\vec L| = \frac12 |\vec r\times\vec v| = \frac12 r v_\perp = \frac{r\cdot dr_\perp}{2\,dt} = \frac{d\,\text{Fläche}}{dt}$

T und V

Wollen "Energie" ein Physik ergründen — multipliziere daran Bew.gl. mit der einmal weniger abgeleiteten Unbekannten.

Hier: $\vec v \cdot [\, m\ddot{\vec r} = \vec K \,]$

$m\vec v\cdot\dot{\vec v} = \vec v\cdot\vec K$

$(\frac m2 \vec v^2)^{\cdot} = \frac{d\vec r\cdot\vec K}{dt} = \frac{dA}{dt}$ mit dA = am T. in dt verrichtete Arbeit

Energiezufuhr erhöht also die Größe

$\frac m2 \vec v^2 =: T$ = kinetische Energie

Kann man auch $\vec v\cdot\vec K = (\text{etwas})^{\cdot}$ schreiben?

"Potential" ("pot. E.")

wenn es zu gegebenem $\vec K(\vec r)$ eine Hilfsfunktion $V(\vec r)$ derart gibt, daß $\vec K(\vec r) = -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$ (($= -\vec\nabla V$)) gilt, dann ist $\vec v\cdot\vec K = -\vec v\cdot(\partial_x V,\partial_y V,\partial_z V) = -\partial_t V(\vec r(t))$ und folglich $\partial_t (T+V) = 0$ und somit $\frac m2 \vec v^2(t) + V(\vec r(t)) = \mathrm{const}_t = E$ ("Energieerhaltungssatz" der Mechanik eines Tp.)

Gebrauch der Erhaltungssätze:

$\vec P_{\text{vor Stoß}} = \vec P_{\text{nach Stoß}}$

$\vec L_{\text{start}} = \vec L_{\text{später}}$

$(T+V)_{\text{start}} = (T+V)_{\text{später}}$

V's A) $\vec K = (0,0,-mg) \overset{?!}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$

V unabh. von x, y; $V'(z) = mg$, $V(z) = mgz + C$ C egal

wähle $C = 0$ ⇒ $V(z) = mgz$

((allg.: $[V]$ = Kraft · Länge = Energie

mühsame Positionsänderung erhöht V

manchmal ist E-Satz schneller als Bew.gl.-Lösen))

B) "ideale Feder" := { hat keine Masse, keine Eigenschwing., erfüllt aus perfekt, hat Daten κ, ℓ }

(Kraft = κ · Ausdehnung)

$K_1 = -\kappa x \overset{?!}{=} -\partial_x V(x)$

⇒ $V(x) = \frac\kappa2 x^2 + \cancel{c}$

Translation um $+\ell$, $x \to x-\ell$

$K_1 = -\kappa(x-\ell)$

$V(x) = \frac\kappa2 (x-\ell)^2$

V ist über Feder verteilt: Hälfte hat 2κ

($\kappa_{\text{h}} = K = \kappa_{\text{Hälfte}}\cdot\frac12$,)

und es ist tatsächlich $V = \frac\kappa2 a^2 \overset{?!}{=} 2\,\frac{(2\kappa)}{2}\,(\frac a2)^2$

... weiter halbieren, bis zu atomaren Auslenkungen.

Folglich hat $\vec K = \vec e_{m\to\text{Aufh.}}\,\kappa\,(r_{mB} - \ell)^2$

das Potential $V = \frac\kappa2 (r_{m\text{Aufh.}} - \ell)^2$

(check: per $-(\partial_x V, \ldots, \ldots)$ zu $\vec K$ gelangen!)

C) $\vec K = -\gamma m M \frac{\vec r}{r^3} \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$

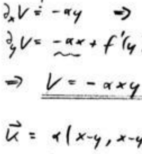
Ansatz: $V(\vec r) = f(r)$

$-\partial_x V = -f'(r)\cdot\partial_x\sqrt{x^2+y^2+z^2} = -f'(r)\frac xr \overset{!}{=} -\gamma m M \frac{x}{r^3}$

⇒ $f'(r) = \frac{\gamma m M}{r^2}$, $f = \frac Cr$, $f' = -\frac{C}{r^2}$, $C = -\gamma m M$, $f = -\frac{\gamma m M}{r} + A$

⇒ $\underline{V(\vec r) = -\frac{\gamma m M}{r}}$ "Gravitations-Potential"

(($z \ll R$, $V = -\frac{\gamma m M}{R+z} = -\frac{\gamma m M(R-z)}{R^2-z^2} \approx \mathrm{const}_z + m\frac{\gamma M}{R^2} z + O(z^2)$



oder: durch Reihenentwicklung

$\frac{1}{R+z} = \frac1R + Az + O(z^2)$

$1 = (R+z)(\frac1R + Az + \ldots)$

$= 1 + RAz + \frac zR + O(z^2)$

⇒ $A = -\frac{1}{R^2}$))

D) komponentenweises Aufleiten [s.a. Ü18]

D1) 2D, $\vec K(\vec r) = (\alpha y, \alpha x) \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V)$

$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha y$ ⇒ $V = -\alpha x y + f(y)$

$\partial_y V = -\alpha x + f'(y) \overset{!}{=} -\alpha x$ ⇒ $f = \mathrm{const}_{x,y}$

⇒ $\underline{V = -\alpha x y}$

D2) $\vec K = \alpha(x-y, x-y)$

$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$, $V = -\frac\alpha2 x^2 + \alpha x y + f(y)$

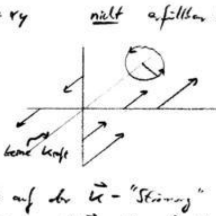
$\partial_y V = \alpha x + f'(y) \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$ nicht erfüllbar!

$\vec K$ hat kein V.

E-Satz gilt nicht:

Pendel-E nimmt zu

(es gibt solche $\vec K$'s)



Vermutung: $\vec K$ hat V ⇔ sich auf der $\vec K$-"Strömung" nichts dreht

(SS: $\mathrm{rot}\,\vec K = \vec 0 = \vec\nabla\times\vec K$)

V's addieren sich, weil sich $\vec K$'s addieren:

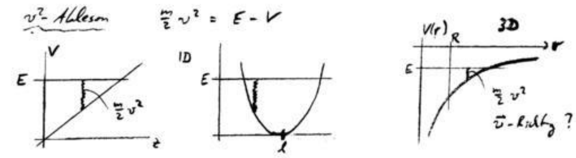
$\vec K = -(\partial_x V, \ldots, \ldots)$

$\vec F = -(\partial_x W, \ldots, \ldots)$

$\vec K + \vec F = -(\partial_x(V+W), \ldots, \ldots)$

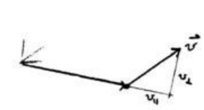
Gesamtpotential eines T.-Systems = Σ seiner V's.

v^2-Ablesen $\frac m2 v^2 = E - V$



effektives Potential

$v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$



$\vec L = m\vec r\times\vec v = m\vec r\times\vec v_\perp$

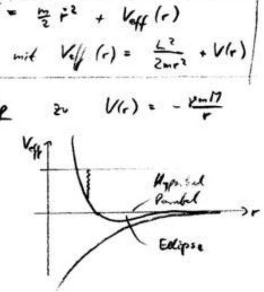
$L = |\vec L| = m r v_\perp$

$\dot r = \partial_t\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \vec e_r\cdot\vec v = v_\parallel$ (vgl. Skript S.16, Ende Kap. 2)

$E = \frac m2(\dot r^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}) + V(r)$

$$\boxed{E = \frac m2 \dot r^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad \text{mit } V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Bsp zu $V(r) = -\frac{\gamma m M}{r}$



Newton regiert die Welt: Kräfte bekannt, weiter per $m\ddot{\vec r} = \vec K$ Zukunft liegt fest. (Laplace'scher Dämon)

4. Tensoren

Fremdwort?

zur Beruhigung: Vektor = Tensor 1. Stufe ; 2. Stufe , ...

$(\text{"}, \text{"}, \text{"})$ $\begin{pmatrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} \end{pmatrix}$

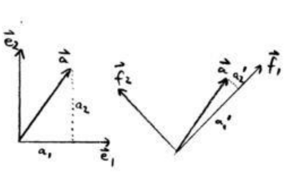
Vektoren sind "Pfeile".

aber was ist ein "Pfeil"?

→ etwas, was im gedrehten System andere Schatten bekommt.

4.1 Drehmatrix

Koord-System-Drehung.
Pfeil bleibt stehen.
Komponenten ändern sich.



$\text{"}\vec{a}'\text{"} := (a_1', a_2', a_3')$

(hier: Vektoren vertikal aufschreiben von Vorteil)

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1' = \vec{f}_1\vec{a}_1 \\ a_2' = \vec{f}_2\vec{a}_1 \\ a_3' = \vec{f}_3\vec{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1\vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_1\vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_1\vec{e}_3 a_3 \\ \vec{f}_2\vec{e}_1 a_1 + \dots \\ \underbrace{\vec{f}_3\vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_3\vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_3\vec{e}_3 a_3}_{(\vec{f}_3\vec{e}_1,\ \vec{f}_3\vec{e}_2,\ \vec{f}_3\vec{e}_3)\cdot\vec{a}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f}_1\vec{e}_1 & \vec{f}_1\vec{e}_2 & \vec{f}_1\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2\vec{e}_1 & \dots & \dots \\ \vec{f}_3\vec{e}_1 & \vec{f}_3\vec{e}_2 & \vec{f}_3\vec{e}_3 \end{pmatrix}}_{=D} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$=$ Matrix D angewandt auf $\vec{a}$

d.h. D-Zeile $\cdot\,\vec{a}$, nach "Zeile mal Spalte"-Regel:

allg. $\begin{pmatrix} \text{———} \\ \sim\sim\sim \\ \text{-------} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cdot\vdots \\ \sim\cdot\vdots \\ \text{---}\cdot\vdots \end{pmatrix}$

Operator · Element = neues Element

kurz: $\vec{a}' = D\vec{a}$, $D = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -\vec{f}_2- \\ -\vec{f}_3- \end{pmatrix}$

D-Zeilen: $\vec{f}$'s im alten System
D-Spalten: $\vec{e}$'s im neuen

Zeile Spalte

kurz: $a_j' = \underbrace{D_{jk} a_k}$, $D_{jk} = \vec{f}_j\cdot\vec{e}_k$

es ist $(D\lambda\vec{a})_j = D_{jk}\lambda a_k = (\lambda D_{jk}) a_k = \lambda(D\vec{a})_j$

allg.: $\lambda\cdot\text{Matrix} := \begin{pmatrix} \lambda\sim & \lambda\sim & \lambda\sim \\ \lambda\sim & \dots & \dots \\ \lambda\sim & \lambda\sim & \lambda\sim \end{pmatrix}$

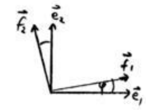
es ist $(D(\vec{a}+\vec{b}))_j = D_{jk}(a_k+b_k) = D\vec{a} + D\vec{b}$

⇒ Matrix-Anwendung ist <u>lineare</u> Operation.

3 elementare D's

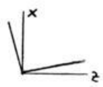
$c := \cos(\varphi)$ $s := \sin(\varphi)$

Drehung um Winkel φ um z-Achse



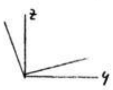
$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

〃 um y-Achse



$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$

〃 um x-Achse



$D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$

2 Drehungen nacheinander

$\vec{g}'s \xleftarrow{(2)} \vec{f}'s \xleftarrow{(1)} \vec{e}'s$
$\vec{a}''$ $\vec{a}'$ $\vec{a}$

$\vec{a}'' = D^{(2)}\vec{a}'$, $\vec{a}' = D^{(1)}\vec{a}$

$= D^{(2)}(D^{(1)}\vec{a}) = \text{"}D^{(2)}D^{(1)}\text{"}\vec{a}$?

$a_j'' = D^{(2)}_{jl}(\dots)_l = \underbrace{D^{(2)}_{jl} D^{(1)}_{lk}}\, a_k$

$D^{\text{ges.}}_{jk} = \begin{pmatrix} j\text{-te Zeile} \\ \text{von } D^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k\text{-te Spalte} \\ \text{von } D^{(1)} \end{pmatrix}$

allg. $\begin{pmatrix} \text{———} \\ \sim\sim\sim \\ \text{-------} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & \wr & \vdots \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\cdot| & -\cdot\wr & -\cdot\vdots \\ \sim\cdot| & \sim\cdot\wr & \sim\cdot\vdots \\ \text{---}\cdot| & \text{---}\cdot\wr & \text{---}\cdot\vdots \end{pmatrix}$

$(AB)_{jk} = A_{jl}B_{lk}$

Reihenfolge wichtig: $AB \neq BA$!

Spur

$Sp(A) := A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{jj}$

$Sp(AB) = Sp(BA)$

denn: $(AB)_{jj} = A_{jk}B_{kj} = B_{kj}A_{jk} = (BA)_{kk}$

also: $Sp(ABC) = Sp(CAB)$ "zyklische Invarianz der Spur"

Umgang mit Matrizen

1. $(A\vec{a})_j = A_{jk}a_k$
2. $(AB)_{jk} = A_{jl}B_{lk}$
3. $(\lambda A)_{jk} = \lambda A_{jk}$
4. $(A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$
5. $Sp(A) = A_{jj}$ ⇒ $Sp(AB\dots C) = Sp(B\dots CA)$
6. $\det(A) = \varepsilon_{jkl}A_{1j}A_{2k}A_{3l}$
   $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Zitat)
7. $(A^T)_{jk} := A_{kj}$, $A^T = A \Leftrightarrow A$ ist "symmetrisch"
   $A^T = -A \Leftrightarrow A$ ist "antisymmetrisch"
   ⇒ $\vec{b}\cdot(A\vec{a}) = (A\vec{a})\cdot\vec{b} \overset{!}{=} \vec{a}A^T\vec{b}$
   denn: $A_{jk}a_kb_j = a_k(A^T)_{kj}b_j$
   Anwendung: $\vec{a}'^2 = (D\vec{a})\cdot D\vec{a} = \vec{a}\underbrace{D^TD}_{=1}\vec{a} = \vec{a}^2$, s. unten
   $\vec{a}'\cdot\vec{b}' = \vec{a}D^TD\vec{b} = \vec{a}\vec{b}$ "Invarianz des Skalarprod. unter Drehung"
8. A^{-1} := die $A^{-1}A = \mathbb{1}$ erfüllende Matrix
9. Dyadisches Produkt $(\vec{a}\circ\vec{b})_{jk} := a_jb_k$
   ⇒ $[(\vec{a}\circ\vec{b})\vec{c}]_j = (\vec{a}\circ\vec{b})_{jk}c_k = a_jb_kc_k = [\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c})]_j$
   kurz: $(\vec{a}\circ\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$
10. $(\vec{a}\times\dots) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$
    denn: $(\vec{a}\times\dots)\vec{b} = (〃)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \vec{a}\times\vec{b}$ ✓

Drehachse und -winkel

$DD^T = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -\vec{f}_2- \\ -\vec{f}_3- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

$D^TD = \begin{pmatrix} -\vec{e}_1'- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{e}_1' & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

⇒ Orthonormierung : $DD^T = D^TD = \mathbb{1}$

Rechtssystemerhaltung: $\det(D) = 1$ (denn: $\det(D) = \vec{f}_1(\vec{f}_2\times\vec{f}_3)$, s. Spatprodukt Kap. 1; Skript S. 10)

Winkeltreue : $D(\vec{a}\times\vec{b}) = (D\vec{a})\times(D\vec{b})$

$D \to$ Achse $\vec{e}$: $D\vec{b} = \vec{b}$, $\vec{e} = \vec{b}/b$

$D \to$ Winkel φ : $Sp(D) = 1 + 2\cos(\varphi)$
$\vec{e}\cdot((D\vec{f})\times\vec{f}) = \sin(\varphi)$ mit $\vec{f}$ Einheitsvektor $\perp\vec{e}$

$\vec{e},\varphi \to D$: $D = \underset{\uparrow\cos(\varphi)}{c}\,\mathbb{1} + (1-c)\,\vec{e}\circ\vec{e} - \underset{\uparrow\sin(\varphi)}{s}(\vec{e}\times\dots)$ $(*)$

!

Strategie: $(*)$ verifizieren → Rest folgt.

$(*)$ ist vektoriell formuliert, also genügt Nachweis eines Spezialfalles.

zu z.B. $\vec{e} = (0,0,1)$

ist $\vec{e}\circ\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $(\vec{e}\times\dots) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

und somit $(*)_{rhs} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_{z,\varphi}$ qed.

q.e.d.
quod erat demonstrandum
was zu zeigen war

$\vec{e} = (u,v,w)$ liefert die allgemeine Drehmatrix:

$$D_{\text{allg}} = \begin{pmatrix} c+(1-c)u^2 & (1-c)uv+sw & (1-c)uw-sv \\ (1-c)vu-sw & c+(1-c)v^2 & (1-c)vw+su \\ (1-c)wu+sv & (1-c)vw-su & c+(1-c)w^2 \end{pmatrix}$$

aus Drehg folgen nun die restlichen Eigenschaften S.28 oben:

z.B. $Sp(D) = 3c + (1-c)\underbrace{(u^2+v^2+w^2)}_{=1} = 1 + 2c$ (immer!)

$D \to$ Achse: Eigenwertproblem

$(D-\mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist homogenes Gl. system

legt $|\vec{b}|$ nicht fest, also ist (zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$)

eine der 3 Glen $(D-\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abhängig (folgt aus den beiden anderen)

$(D-\mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist Spezialfall des <u>Eigenwertproblems</u>,

d.h. der Frage, welche Elemente sich bei Op-Anw. reproduzieren:

(lin. Op.)(Element) = Faktor (gleiches Element)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{gegeben}}}{H} \quad \vec{\psi} \quad = \quad E \quad \vec{\psi}$$

gesucht: Eigenvektor (EV) $\vec{\psi}$
Eigenwert (EW) E

((z.B. hat $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2$ die EV $\sim$ trig(kx) mit EW $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$))
(((Bewegl. der QM $i\hbar\dot{\psi} = H\psi$)))

hier: eine Drehmatrix hat stets den EW $+1$
und die Drehachse als zugehörigen EV.

bessere Vektor-Def.

vgl. Kap. 1; Skript S.2

> Tripel a_j sind <u>Vektoren</u>, wenn unter Koord-System-Drehung (D) die Änderung der Elemente in
> $a_j' = D_{jk}a_k$ (sowie Addition und λ-Multiplikation)
> physikalisch sinnvoll ist

oder: $\boxed{\text{Box S.2}}$ und "Pfeile" sind Koordinaten-Dreh-anfällige Schattenspender gemäß $\vec{a}' = D\vec{a}$

4.2 Tensoren 2. Stufe

$H_{j_1 j_2 \dots j_n}$ ist Tensor n-ter Stufe $\Leftrightarrow$ die Elemente bei Ko-Syst Drehung (D) übergehen in

$$H'_{j_1 \dots j_n} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \cdots D_{j_n k_n} H_{k_1 \dots k_n}$$

Stufe n	Name	Schema	Transformation
0	Skalar	<u>eine</u> Zahl c	$c' = c$
1	Vektor	Tripel $\vec{a}$	$\vec{a}' = D\vec{a}$
2	Tensor 2.St.	Matrix H	$H' = DHD^T$ (s.u.)
3	z.B. ε_{ijk}	Kubus	s.o.

<u>n=0</u> Skalare sind m, q, c, Temp T, $V(\vec{r})$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$,
$Sp(H)$ ((s.u.)), $\det(H)$ ((s.u.))

<u>n=1</u> Vektoren, s. halbes WS

<u>n=2</u> Tensoren 2. Stufe

$$H'_{j_1 j_2} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} H_{k_1 k_2} = D_{j_1 k_1} H_{k_1 k_2} (D^T)_{k_2 j_2}$$

d.h. $H' = DHD^T$

((verstehen jetzt: $Sp(H') = Sp(DHD^T) = Sp(HD^TD) = Sp(H)$
und $\det(H') = \det(D)\det(H)\det(D^T) = \det(H)$))

Philo: Waren immer stolz auf vektoriell formulierte Zus-hänge. Respektieren die Invarianz der Natur unter Ko-Syst-Drehungen. Jede Natur-Größe muß sich <u>verhalten</u> unter Drehungen, ist also Skalar oder Vektorkomp. oder Tensorkomp.

> Jede phys. Größe ist als Komponente eines Tensors zu identifizieren

Jede Antwort-Matrix ist Tensor 2. Stufe

$\vec{j} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{E}$, $\vec{K} = -\underline{\underline{K}}\vec{r}$, $\vec{v} = \underline{\underline{(\vec{\omega}\times\ )}}\vec{r}$, $\vec{L} = \underline{\underline{I}}\vec{\omega}$

Struktur: $\overrightarrow{\text{Antwort}} = (\text{Matrix})\,\overrightarrow{\text{Ursache}}$

$$\vec{a} = H \vec{u} \qquad (*)$$

Frage nach H' in $\vec{a}' = H'\vec{u}'$

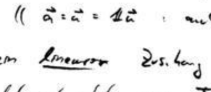
D auf $(*)$ anwenden: $\vec{a}' = D\vec{a} \overset{!}{=} DH\vec{u} = DHD^TD\vec{u} = DHD^T\vec{u}'$

$\Rightarrow (H' - DHD^T)\vec{u}' = \vec{0} \quad \forall \vec{u}'$

$\Rightarrow$ H <u>ist</u> Tensor 2. Stufe

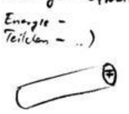
(($\vec{a} = \vec{u} = \mathbb{1}\vec{u}$: auch $\mathbb{1}$ ist Tens. 2.St.))

$\rightsquigarrow$ ein <u>linearer</u> Zus.hang zw. 2 Vektoren definiert stets einen Tensor 2. Stufe

<u>Bsp</u>  z.B. Ziehen eines <u>Schlittschuhläufers</u>
$\vec{v} = H\vec{K}$

<u>Bsp</u> σ: e^- im Draht

Ladungs-Stromdichte $\vec{j} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}\perp\vec{e}}\,\vec{e}$
(Energie-, Teilchen-, ...)



in Δt fließt durch F das Volumen $F\cdot(v\Delta t)$, und die Anzahl $\frac{N}{V}\cdot F(v\Delta t)$ Teilchen

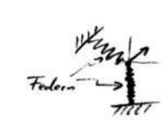
$$\vec{j} = \frac{q\cdot\frac{N}{V}\cdot F\cdot v\Delta t}{\Delta t\ F}\,\vec{e} = q\frac{N}{V}\vec{v} = q\frac{N}{V}Hq\vec{E} =: \sigma\vec{E}$$

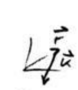
"Leitfähigkeitstensor"

($\vec{E}$-Richtung so, daß $\vec{j} \parallel \vec{E}$? s. 4.3; $j = \sigma E$

<u>dann</u> (Strom = Ladung pro Zeit = Fj)

$$I = F\underbrace{\frac{\sigma}{L}}_{\frac{1}{\text{"Widerst."}}}\underbrace{LE}_{\text{"Spannung"}} = \frac{U}{R} \quad \text{"Ohm"}$$))

<u>Bsp</u> K:  Federn — Ursprung in Gleichgew.-Position

 $\vec{K} = -K\vec{r} + O(r^2)$

(($\vec{r}$-Richtung so, daß $\vec{K} \parallel \vec{r}$? s. 4.3))

existiert ein Potential $V(\vec{r})$?

2D: $K = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}$

$\partial_x V \overset{!}{=} -K_1 = \kappa_{11}x + \kappa_{12}y$, $V = \frac{\kappa_{11}}{2}x^2 + \kappa_{12}xy + f(y)$

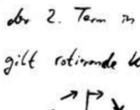
$\partial_y V = \kappa_{12}x + f'(y) \overset{!}{=} -K_2 = \kappa_{21}x + \kappa_{22}y$

$\Rightarrow$ <u>nur</u> für $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ existiert $V = \frac{\kappa_{11}}{2}x^2 + \frac{\kappa_{22}}{2}y^2 + \kappa_{12}xy$

allg: $K = K^T \Leftrightarrow \vec{K} = -K\vec{r}$ hat $V = \frac{1}{2}\vec{r}K\vec{r}$

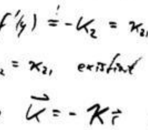
((der 2. Term in $K = \frac{1}{2}(K + K^T) + \frac{1}{2}(K - K^T)$

gibt rotierende Kraft: $\vec{K}_{2.\text{Term}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \kappa_{12}-\kappa_{21} \\ \underbrace{\kappa_{21}-\kappa_{12}}_{\equiv 2\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha y, -\alpha x)$))



<u>Bsp</u> I: "Trägheitstensor"

starrer Körper
Achse $\vec{\omega}$ verdreht
Ursprung auf Achse



a-ter Massepkt

$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a = \sum_a m_a\vec{r}_a\times\vec{v}_a =: I\vec{\omega}$ definiert I

falls $\vec{L}_a = I_a\vec{\omega}$, dann $\vec{L} = \sum_a I_a\vec{\omega}$, d.h. $I = \sum_a I_a$

(... Bsp I) $\quad$ bac-cab: $\vec\omega(\vec r\vec r)-\vec r(\vec r\vec\omega)$

$$\vec L_a = m_a\vec r_a\times(\vec\omega\times\vec r_a) \stackrel{!}{=} \underbrace{m_a\left(r_a^2\mathbb{1}-\vec r_a\circ\vec r_a\right)}\vec\omega$$

$$I_a \stackrel{!}{=} m_a\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz\\ -yx & r^2-y^2 & -yz\\ -zx & -zy & r^2-z^2\end{pmatrix} \text{ alles Index } a$$

$$\Rightarrow I = \sum_a m_a\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz\\ & x^2+z^2 & -yz\\ sy. & & x^2+y^2\end{pmatrix}_a$$

es ist $\vec L' = I'\vec\omega'$ mit $I' = DID^T$

((denn: $\vec L' = D\vec L = DI\vec\omega = DID^TD\vec\omega = I'\vec\omega'$))

(($\vec\omega$ so, daß $\vec L\parallel\vec\omega$? d.h. daß $I\vec\omega = \text{const}\cdot\vec\omega$? s. 4.3))

Philo: I-Komponenten hängen von Position des Körpers, und damit i.A. von der Zeit ab.
→ Drehmomente $\partial_t\vec L = \vec r\times\vec K$ machen Achsen-Lager kaputt! "Auswuchten" Achse ∥ Hauptachse"

Schwerpkt des st. Kö.: $M = \sum_a m_a$
$\vec R := \frac{1}{M}\sum_a m_a\vec r_a$

4.3. Hauptachsentransformation

gegeben: ein symm. Tensor H, d.h. $H^T = H$

Beh.: stets existiert (mind.) ein D derart, daß

$$H' = DHD^T = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$, d.h. H' diagonal wird.

Frage clever aufschreiben:

$$\begin{pmatrix}-\vec f_1-\\ -2-\\ -3-\end{pmatrix} H\begin{pmatrix}| & | & |\\ \vec f_1 & 2 & 3\\ | & | & |\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\vec f_1-\\ -2-\\ -3-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}| & | & |\\ H\vec f_1 & 2 & 3\\ | & | & |\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\vec f_1H\vec f_1 & \vec f_1H\vec f_2 & 13\\ \vec f_2H\vec f_1 & \vec f_2H\vec f_2 & 23\\ \vec f_3H\vec f_1 & 32 & 33\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

↝ es muß $H\vec f_1 = \lambda_1\vec f_1$, $H\vec f_2 = \lambda_2\vec f_2$, ... sein

⇒ müssen also $H\vec f = \lambda\vec f$ lösen
und 3 orthonormierte $\vec f$'s mit je zugehörigen reellen λ's erhalten.

Das geht immer, denn:

A) $\vec f$ ist normierbar ($H\vec f = \lambda\vec f$ legt Betrag nicht fest)

B) $\vec f$'s zu verschiedenen λ's sind automatisch orthogonal:

$H\vec f_1 = \lambda_1\vec f_1 \Rightarrow 0 = H\vec f_1-\lambda_1\vec f_1$ $\quad$ multipl. m. $\vec f_2$ v. links

$0 = \vec f_2H\vec f_1-\lambda_1\vec f_1\vec f_2$ $\quad$ $H\vec f_2 = \lambda_2\vec f_2$

$= (H^T\vec f_2)\vec f_1 = (H\vec f_2)\vec f_1 \stackrel{!}{=} \lambda_2\vec f_2\vec f_1$

$= (\lambda_2-\lambda_1)\vec f_1\vec f_2$ $\quad$ qed.

C) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ können (ohne $\vec f$-Kenntnis) aus einer kubischen Glg. erhalten werden, denn das hom. Gl.-Syst $(H-\lambda\mathbb{1})\vec f = \vec 0$ ist nur lösbar, wenn

$$\det(H-\lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix}H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13}\\ H_{12} & H_{22}-\lambda & H_{23}\\ H_{13} & H_{23} & H_{33}-\lambda\end{vmatrix}$$

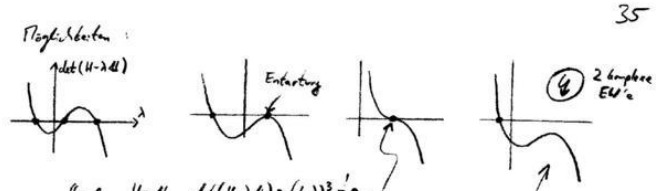
$$= -\lambda^3+\lambda^2(H_{11}+H_{22}+H_{33})-\lambda(H_{11}H_{22}+H_{11}H_{33}+H_{22}H_{33})+\det(H)$$

$= 0$ ist.

(($\begin{pmatrix}-\vec a-\\ -\vec b-\\ -\vec c-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\\ \vec f\\ |\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ heißt $\vec a\vec f = \vec b\vec f = \vec c\vec f = 0$ zu erfüllen.
$\vec f\neq\vec 0$ nur möglich, wenn $\vec a,\vec b,\vec c$ in einer Ebene,
d.h. Spatprodukt = Determinante = 0))

$= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$

Möglichkeiten:



((z.B. $H = \mathbb{1}$, $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^3 \stackrel{!}{=} 0$;
$\lambda = 1$ ist dreifach entartet))

((In $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda^2-2p\lambda+q) = 0$
und in $\lambda_{2/3} = p\pm\sqrt{p^2-q}$ könnte $q>p^2$ sein.
Dann ist i nötig, $i\cdot i = -1$, und $\lambda_{2/3} = p\pm i\sqrt{q-p^2}$))

D) die EW $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sind reell, d.h. ④ tritt nie ein; denn:

$H\vec f = \lambda\vec f \Rightarrow \lambda\vec f^*\vec f = \vec f^*H\vec f = (H^*\vec f^*)\vec f = \lambda^*\vec f^*\vec f$

$\Rightarrow \lambda = \lambda^*$ (($\lambda = a+ib = a-ib = \lambda^* \Rightarrow b = 0$))

((Größe* = Größe $|_{i\to -i}$))

E) bei Entartung ($\frac{2}{3}$ λ's gleich) ist ein orthonormiertes $\frac{2}{3}$-Bein wählbar:

$H\vec f_1 = \lambda\vec f_1$, $H\vec f_2 = \lambda\vec f_2$ } jede LK aus $\vec f_1,\vec f_2$ ist EV zu EW λ ⇒ also wähle zu λ zwei orthogonale $\vec f$'s

$H\vec f_3 = \lambda_3\vec f_3$

HT-Rezept

I $\quad H = H^T$ erfüllt? (sieht man: H symmetrisch)

II $\quad$ löse $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = 0$
(kubische Glg: λ_1 raten. dann $\det = (\lambda_1-\lambda)$(quadr. Glg.))

III $\quad$ Probe: $Sp(H) \stackrel{?!}{=} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ (und auch: $\det(H) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$)

IV $\quad$ löse $(H-\lambda_1\mathbb{1})\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec f\\ \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec f_1$. normiere $\vec f_1$ ($|\vec f_1| = 1$).
dito für λ_2. dito für λ_3.

V $\quad$ Probe: Orthogonalität, d.h. $\vec f_1\vec f_2 = \vec f_1\vec f_3 = \vec f_2\vec f_3 = 0$

VI $\quad$ Rechtssystem? (evtl ein $\vec f$-Vorzeichen ändern) (a) malen (b) $\vec f_3 = \vec f_1\times\vec f_2$ (c) $\det(D) = +1$

VII $\quad$ Resultat notieren: $H' = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}-\vec f_1-\\ -2-\\ -3-\end{pmatrix}$

Nachtrag zur HT

was ist H anschaulich? (sy. Matrix)

e.g. Federn im Raum

[Lese H als Potential von $\vec K = -2H\vec r$
$V = \vec rH\vec r$ $\quad$ $\begin{pmatrix}-\vec f_1-\\ -2-\\ -3-\end{pmatrix}$
((check: $\partial_xV = (\partial_x\vec r)H\vec r+\vec rH(\partial_x\vec r) = 2\vec rH\vec e_x = 2\vec r\vec f_1 = -K_x$ ✓))]

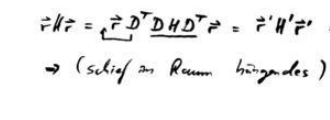
lasse z.B. Computer die [Äquipotential]flächen $\vec rH\vec r = \text{const}$ malen.

$\vec rH\vec r = \vec rD^TDHD^TD\vec r = \vec r'H'\vec r' = \lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2 = \text{const}$

⇒ (schief im Raum hängendes) Ellipsoid oder Hyperboloid

5. Funktionen

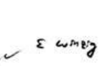
x, x^2, $\frac{1}{1+x^2}$, c, s, e^x — nur wenige mehr werden benötigt



Funktionen der Natur sind (i.d. Regel) "weich",
jedoch manchmal Intervall-beschränkt (z.B. r-Achse).
Haben wir Menschen eine pathologische Stelle auf dem Papier,
so kommt meist deren eingebettete Version der Wahrheit näher.

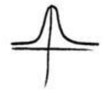
pathologische Stellen unter der Lupe

ε winzig!

Knick, z.B. $|x|$,  ; $\sqrt{x^2+\varepsilon^2}$, 

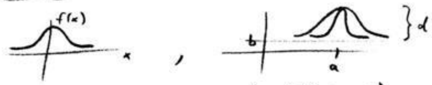
Stufe, z.B. $\frac{x}{|x|}$,  ; $\frac{x}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}$, 

Pol, z.B. $\frac{1}{x}$,  ; $\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}$, 

quadr. Singularität, z.B. $\frac{1}{x^2}$,  ; $\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}$, 

5.1. Skalen-Änderungen, Vokabeln

Verschieben etc.



$b + d f(c[x-a])$

Spiegeln $f(-x)$ an f-Achse, $-f(x)$ an x-Achse, $-f(-x)$ am Ursprung

gerade/ungerade: f ist gerade (g) $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

f ist ungerade (u) $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

((Bsp: g: $\cos(x), \frac{1}{1+x^2}$; u: $\sin(x), \frac{x}{1+x^2}$))

$g \cdot u = u$, $u \cdot u = g$

$\partial_x g = u$, $\partial_x u = g$

((denn $\frac{g(-x+\varepsilon)-g(x)}{\varepsilon} = -\frac{g(x-\varepsilon)-g(x)}{-\varepsilon}$))

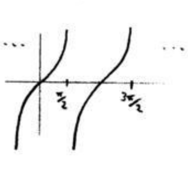
allg.: $f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)}_{g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)}_{u}$

g-u-Bsp. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

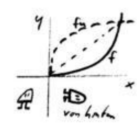
ist ungerade

π-periodisch

hat ∞ viele Pole



Umkehrfkt $f_u(x) :=$ an Diagonale gespiegeltes $f(x)$



$y = f(x)$, $\Rightarrow x = f_u(y)$; $y = f(f_u(y))$, $x = f_u(f(x))$

$f_u'(x) = \frac{1}{f'(f_u(x))}$, denn

∂_x auf $x = f(f_u(x))$ gibt $1 = f'(f_u(x)) \cdot f_u'(x)$ ∎

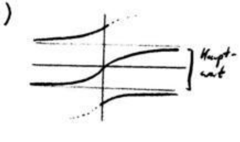
((Bsp: $f = x^2$, $f_u = \sqrt{x}$, $f_u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$))

Anw.-Bsp $f(x) = \tan(x)$, $f_u(x) =: \arctan(x)$

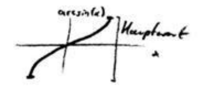
$\partial_x \tan(x) = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{c^2+s^2}{c^2} = 1 + \tan^2(x)$

$\partial_x \arctan(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$

"Stammfunktion" zur Lorentz-Kurve



$\partial_x \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



5.2. e-Funktion

14 Wünsche an jede neue Fkt – am Bsp dieser neuen.

s.z.B. Gliederung in [Abramowitz/Stegun, Handbook of math. fcts]

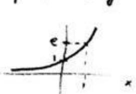
- •1 Name: e-Funktion
- •2 Bezeichnung: $\exp(x)$ (vorläufig)
- •3 Bedarf: (a) Wachstum $\boxed{\dot N = \alpha N,\ N(0) = N_0}$ $[\alpha] = \frac{1}{Zeit}$

  Ans $N(t) = N_0 f(\alpha t)$; $N_0 f' \cdot \alpha = \alpha N_0 f$, $N_0 f(0) = N_0$

  $\Rightarrow f \in R$: $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$

  (b) $m\dot v = -m\lambda v$, $v(0) = v_0$

  Ans $v(t) = v_0 f(-\lambda t)$; $\underline{-\lambda v_0} f' = \underline{-\lambda v_0} f$, $f(0) = 1$

- •4 Def: $\exp(x) :=$ Lsg von $\boxed{f'(x) = f(x),\ f(0) = 1}$
- •5 Verlauf:  $f(1) =: e \approx 2.72$
- •6 Funktionale Beziehung

  $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} =: g(x)$, $g(0) = 1$, $g'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$

  $\Rightarrow g$ erfüllt auch $\boxed{\dots}$

  $\Rightarrow \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

  $\Rightarrow \exp(x) = e^x$

  ((denn: $\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}\right) = \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left(\left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n\right)^{\frac{m}{n}} = \left[\exp(1)\right]^{\frac{m}{n}}$))

- •7 Ableitung: e^x
- •8 Stammfunktion: e^x
- •9 Dgln $\partial_x e^x = e^x$, $\partial_x^2 e^{\pm x} = e^{\pm x}$

  (($\ddot x = +\omega^2 x$ mit Ansatz $A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$))

  (($\dot N = \alpha N - \beta$, $N(0) = N_0$ mit (a) Ansatz (b) $N = u + a$ (c) $N = e^{\alpha t} \dots$

  (d) "direkt" $N(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \left(\ \right) e^{\alpha t} = \frac{\beta}{\alpha} + \left(\ -\frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha t} = \frac{\beta}{\alpha} + \left(N_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha t}$))

- •10 Reihe: $f = c_0 + c_1 x$ in $\boxed{f' = f,\ f(0) = 1}$ einsetzen,

  gibt $c_1 = c_0 + \underline{c_1 x}$, $c_0 = 1$

  ↳ oh! Brauche auch $+c_2 x^2$ in f!

  $c_1 + 2c_2 x = c_0 + c_1 x + \underline{c_2 x^2}$

  ↳ oh! Brauche ... alle Potenzen!

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in $\boxed{f' = f,\ f(0) = 1}$ einsetzen.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, $m = n-1$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1}$

$\Rightarrow c_n = \frac{1}{n} c_{n-1}$ für $n = 1, 2, \dots$ und $c_0 = 1$

$c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}, \dots$ $c_n = \frac{1}{n!}$ mit $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ $(n \geq 1)$, $0! := 1$

also $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$; kann auch als exp-Def nehmen.

die Summe hat $\forall x$ einen endlichen Wert

("die Reihe konvergiert $\forall x$"), denn

gegeb. x, $a =$ natürl. Zahl $\gtrsim x$,

$\sum \frac{1}{n!} x^n = 1 + \dots + \frac{a^{10a}}{(10a)!}\left[1 + \frac{a}{10a+1} + \frac{a^2}{(10a+1)(10a+2)} + \dots\right]$

und $[\dots] < 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 1.111\dots$

- •11 Werte: z.B. per Reihe
- •12 Asymptotik, $x \to \infty$:

  $\frac{1}{x^m} e^x \to \infty$, $x^m e^{-x} \to 0$ (e^{-x} erschlägt jede Potenz)

  e^x als Asymptotik $\boxed{f' = f,\ f(0) = 1}$ per Computer,

  $f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f(x) = (1+\varepsilon) f(x)$ $(\varepsilon \to 0)$

  $f(x + N\varepsilon) = (1+\varepsilon)^N f(x)$

  $x = 0$: $f(N\varepsilon) = (1+\varepsilon)^N$

  ↳ nenne dies wieder x; trotz $\varepsilon \to 0$: N beliebig groß

  $f(x) = e^x = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$

  ist auch e^x-Def; (eher exotisch)

●₁₃ Umkehrfkt:

$\ln(e^x) = x \,, \quad e^{\ln(x)} = x$

$\partial_x \ln(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

$\ln(xy) = \ln(e^{\ln x} e^{\ln y}) = \ln(e^{\ln x + \ln y}) = \ln(x) + \ln(y)$

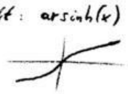
$\ln(\frac{1}{x}) \overset{x=e^u}{=} \ln(e^{-u}) = -u = -\ln(x)$

$10^x = [e^{\ln(10)}]^x = e^{x \underbrace{\ln(10)}_{= 2.3026}}$

$\ln(a+b\varepsilon) = \ln(a[1+\frac{b}{a}\varepsilon]) \overset{!}{=} \ln(a) + \ln(1+\frac{b}{a}\varepsilon)$
$= \ln(a) + \frac{b}{a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$

●₁₄ verwandte Fkn

$e^x = \underbrace{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}_{\equiv \cosh(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}_{\equiv \sinh(x)}$ → Umkehrfkt: arsinh(x) "Area Sinus Hyperbolicus"

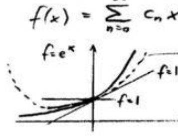


$\cosh' = \sinh \,, \quad \sinh' = \cosh$

$\cosh^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = 1 + \sinh^2$

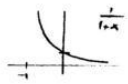
5.3. Potenzreihen

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ nicht nur für e^x ?

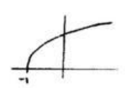


$\to f = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{(1+x)^2+1}{2}$

Strategie funktioniert doch auch bei:



$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cancel{\ }x^2 + \ldots$



$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \cancel{\ }x^2 + \ldots$

wenn $f = \Sigma$, dann: "habe $f(x)$ um $x=0$ entwickelt".

funktioniert immer? — fast (bei Physiker-Fkn)
aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius

wann nicht? — an patholog. Stellen.
entwickle nicht $|x|, \frac{1}{x}, e^{-1/x^2}$ um $x=0$

wozu? —
- kann x^n gut differenzieren und aufleiten
- mit Reihenanfängen Probleme vorab vereinfachen (s. Ü 32) $(\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin(\varphi) \approx -\frac{g}{\ell}\varphi)$
- Resultate abschätzen, Grenzfälle messen (s. Ü 34)
- || kenne f nicht, habe nur Gl für f, setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ an und bestimme $c_0, c_1, \ldots$ aus der Gl

(Bsp dazu war oben: e^x)

weiteres Bsp: $f = 1 + xf$ "Dgl. nullter Ordnung"
hat Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zu Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \overset{!}{=} 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} \,, \quad m = n-1$

$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$

$\Rightarrow c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1}$ für $n \geq 1 \Rightarrow$ alle $c_n = 1$

||| $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{geometrische Reihe}, \ |x|<1}$

Umgang mit Reihen ("Trickliste") (|| Verfahrensweisen)

1. Abspalten (hier: Billig-Bsp v. oben; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist eine wilde Fkt)

$\frac{1}{1-x} \overset{!}{=} 1 + (\frac{1}{1-x} - 1) = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x}$
$\overset{!}{=} 1 + x \cdot [1 + (\frac{1}{1-x} - 1)]$
$\overset{!}{=} \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^N}_{\overset{!}{=} \frac{1-x^{N+1}}{1-x}} + \frac{x^{N+1}}{1-x}$

2. algebraische Umformung

$\sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$
$1+x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2)x^2 + \ldots$
$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$

3. aus Stammfkt ("Diff. einer Reihe")

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \partial_x 2\sqrt{1+x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots$

4. aus Ableitung ("Int. einer Reihe")

$\partial_x(-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$
$-\ln(1-x) = A + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$
$x=0: \quad -\ln(1) = A \quad \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$

5. Add. von Reihen

$\cosh(x) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = [e^x]$ gerader Anteil
$\overset{!}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

$\sinh(x) \overset{!}{=} \partial_x \cosh(x)$
$\overset{!}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

$\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = [\ln(1+x)]_{\text{ungerade}}$
$\overset{!}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

6. aus Dgl, z.B. cos-Reihe aus $\boxed{f'' = -f, f'(0) = 0, f(0) = 1}$:

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

(7. Division v. Reihen: $\tan(x) = \frac{s}{c} = (c_0 + c_1 x + \ldots)$
$\Rightarrow$ (sin-Reihe) $= (c_0 + c_1 x + \ldots)$(cos-Reihe), ausmult, $\Rightarrow c_0, c_1, \ldots$

8. aus $f(f_u(x)) = x$

9. aus funktionalen Beziehungen)

10. mittels $\boxed{i \cdot i = -1}$, $(ix)^2 = -x^2$, $(ix)^3 = -ix^3$

$e^{ix} \overset{!}{=} 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \ldots$

||| $\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad \text{Euler'sche Formel}}$

$\cos(x) = [e^{ix}]_{\text{gerade}} = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \,, \quad \cos(ix) = \cosh(x)$

$\sin(x) = \frac{1}{i}[e^{ix}]_{\text{ungerade}} = \frac{1}{2i}(\ \ -\ \ ) \,, \quad \sin(ix) = i \cdot \sinh(x)$

11. Taylor-Reihe

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

$f(0) = c_0 \,, \ f'(0) = c_1 \,, \ f''(0) = 2c_2 \,, \ f'''(0) = 2 \cdot 3\, c_3$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$

((warum nicht gleich? oft umständlich; z.B. f'' zu Ü 32(a): ganze Seite))

Bsp: $f = (1+x)^\lambda \,, \ f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1} \,, \ f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$

$\underbrace{(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x}_{\text{oft gebraucht}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \ldots$

Zaubertrick zu Taylor:

$f(x) \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \partial_b^n f(b) \big|_{b=0}$
$\overset{!}{=} e^{x\partial_b} f(b) \big|_{b=0}$

((generell: $e^{Op.} = 1 + Op. + \frac{1}{2!}Op.^2 + \ldots$))

Entwickeln um $x=a$:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = e^{(x-a)\partial_b} f(b) \big|_{b=a}$

$f(x+a) = e^{x\partial_b} f(b) \big|_{b=a} = e^{x\partial_a} f(a)$

$f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x) \equiv T_a f(x) \qquad (*)$

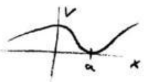
"Translationsoperator" verschiebt Argument um $+a$

zwei (*)-Tests:
- $f(x) = x^2$, $(x+a)^2 \overset{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \ldots)x^2$
$\overset{!}{=} x^2 + 2ax + a^2$, tatsächlich!
- $f(x) = e^x$, $e^{x+a} \overset{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \ldots)e^x = e^x(1 + a + \frac{a^2}{2} + \ldots) = e^x e^a$ ✓

Taylor-Anwendung in Physik:

meist nur bei allg. Betrachtungen

wie z.B. bei kleinen Schwingungen von V-Min. bei $x=a$: (V: Potential)

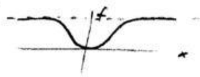


$$V(x) = \underbrace{\cancel{V(a)}}_{\text{egal in } V} + \underbrace{V'(a)}_{=0}(x-a) + \frac{V''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

$$m\ddot{x} = -\partial_x V(x) = -V''(a)(x-a)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{V''(a)}{m}}$$

Warnung $f(x) = e^{-1/x^2}$



$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (\dots) e^{-1/x^2}, \quad f''(0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 0$$

$$\text{Taylor} = 0 + 0 + 0 + \dots \neq f(x)$$

Grund: $x=0$ ist pathologische Stelle

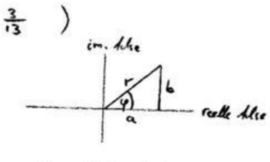
Komplexe Zahlen

sind i enthaltende Bildungen ($=: z$, z.B. $z = \frac{1}{2-3i}$)

können stets auf die Form $z = \underbrace{a}_{Re(z)} + i\underbrace{b}_{Im(z)}$ gebracht werden

(z.B. $z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2}{13} + i\,\frac{3}{13}$)

können als Pkt in "komplexer Ebene" dargestellt werden:



mit $r = \sqrt{a^2+b^2} =: |z|$

ist $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$ (φ = "Phase")

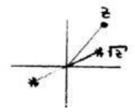
$z^* := a - ib = re^{-i\varphi}$

$2\,Re(z) = a+ib + a-ib = z + z^* =: z + c.c.$

Auch $z = re^{i(\varphi + 2\pi n)}$ gilt ($n = 0, \pm1, \pm2, \dots$)

und ist bei Wurzeln wichtig:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi n}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i\left\{\begin{smallmatrix}\varphi/2 \\ \varphi/2+\pi\end{smallmatrix}\right.} :$$



wegen $-1 = e^{i(\pi + 2\pi n)}$ ist insbes. $\sqrt{-1} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

(($i := \sqrt{-1}$ ist falsch : $-1 = i \cdot i \overset{?}{=} \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = +1$))

5.4 Störungsrechnung

Ein Problem (Gln. für $f(x;\alpha)$) habe einen kleinen Parameter (α).

Kann die Lsg als Reihe in α-Potenzen suchen, d.h.

$$f(x,\alpha) = \underbrace{c_0(x)}_{f^{(0)}(x)} + \underbrace{c_1(x)\,\alpha}_{f^{(1)}(x)} + \underbrace{c_2(x)\,\alpha^2}_{f^{(2)}(x)} + \dots$$

in die f-Gln. einsetzen, um $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots$ zu bestimmen.

zur Notation: wir kennen

$$v(t;\lambda,g) = -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$$ als Lsg. von $\dot{v} = -g - \lambda v$, $v(0) = v_0$. (freier Fall + Reibung)

$$= -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)\left(1 - \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \dots\right)$$

$$= \underbrace{v_0 - gt}_{v^{(0)}(t)} \underbrace{- \lambda v_0 t + \frac{g}{2}\lambda t^2}_{v^{(1)}(t)} + O(\lambda^2) \qquad (*)$$

Bsp A $\boxed{\dot{v} = -g - \lambda v, \quad v(0) = v_0}$

weiß nichts von e-Fkt

λ sei klein (($[\lambda] = \frac{1}{\text{Zeit}}$, $\lambda \ll \frac{g}{v_0}$))

$v(t) = v^{(0)}(t) + v^{(1)}(t) + \dots$, in ER einsetzen

$\dot{v}^{(0)} + \dot{v}^{(1)} = -g - \lambda(v^{(0)} + \dots)$, $v^{(0)}(0) + v^{(1)}(0) = v_0$

"$ER^{(0)}$" $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{v}^{(0)} = -g, \quad v^{(0)}(0) = v_0}$ $\Rightarrow v^{(0)} = v_0 - gt$

"$ER^{(1)}$" $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{v}^{(1)} = -\lambda v^{(0)} = -\lambda v_0 + \lambda g t, \quad v^{(1)}(0) = 0}$ $\Rightarrow v^{(1)} = -\lambda v_0 t + \lambda \frac{g}{2} t^2$

$\rightsquigarrow v^{(0)} + v^{(1)} = (*)$. Es funktioniert!

Bsp B $\boxed{\ddot{z} = -\frac{gR^2}{(R+z)^2}, \quad \dot{z}(0) = v_0, \quad z(0) = 0}$

$g = \frac{\gamma M}{R^2}$, $gR^2 = \gamma M$, Wurfexperiment, um Abweichung von $K = -mg$ nachzuweisen

$R \gg \frac{v_0^2}{2g}$

$\frac{1}{R}$ sei klein: $\ddot{z}^{(0)} + \ddot{z}^{(1)} = -g\,\frac{1}{\left(1 + \frac{z^{(0)}}{R} + \frac{z^{(1)}}{R}\right)^2}$

$$= -g\left(1 - 2\,\frac{z^{(0)}}{R}\right)$$

$ER^{(0)} \Rightarrow \boxed{\ddot{z}^{(0)} = -g, \quad \dot{z}^{(0)}(0) = v_0, \quad z^{(0)}(0) = 0} \Rightarrow z^{(0)} = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$

$ER^{(1)} \Rightarrow \boxed{\ddot{z}^{(1)} = 2g\,\frac{z^{(0)}}{R}, \quad \dot{z}^{(1)}(0) = 0, \quad z^{(1)}(0) = 0} \Rightarrow \dots$

usw.

— Ende §5.4

warum sind Reihenentw. (fast) immer möglich?

- weil wir nur mit Kombinationen aus $x, e^x, i, f_n, f(g), \pm, \cdot, \times, \partial_x, \int \dots$ (← SS07) zu arbeiten verstehen
- weil die Natur "weich" ist

— Ende Kap. 5

— Ende Klausur-Stoff