10. mittels $\boxed{i \cdot i = -1}$, $(ix)^2 = -x^2$, $(ix)^3 = -ix^3$

$$e^{ix} = \underline{1} + ix - \underline{\frac{x^2}{2!}} - i\frac{x^3}{3!} + \underline{\frac{x^4}{4!}} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \underline{\text{Euler'sche Formel}}}$$

$$\cos(x) = \left[e^{ix}\right]_{\text{grade}} = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad , \quad \cos(ix) = \cosh(x)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{i}\left[e^{ix}\right]_{\text{ungerade}} = \frac{1}{2i}\left(\quad - \quad \right) \quad , \quad \sin(ix) = i \cdot \sinh(x)$$

11. Taylor-Reihe

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$f(0) = c_0 \;,\; f'(0) = c_1 \;,\; f''(0) = 2c_2 \;,\; f'''(0) = 2\cdot 3\, c_3$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$$

((warum nicht gleich? oft umständlich; z.B. f'' zu Ü 32(a): ganze Seite))

Bsp: $f = (1+x)^\lambda$, $f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$

$$\underbrace{(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x}_{\text{oft gebraucht}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} x^2 + \dots$$

Zaubertrick zu Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \partial_b^n f(b) \Big|_{b=0} = e^{x\partial_b} f(b) \Big|_{b=0}$$

((generell: $e^{Op.} = 1 + Op. + \frac{1}{2!} Op.^2 + \dots$))

Entwickeln um $x = a$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n = e^{(x-a)\partial_b} f(b) \Big|_{b=a}$$

$$f(x+a) = e^{x\partial_b} f(b) \Big|_{b=a} = e^{x\partial_a} f(a)$$

$$f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x) \equiv T_a\, f(x) \qquad (*)$$

"Translationsoperator" verschiebt Argument um $+a$

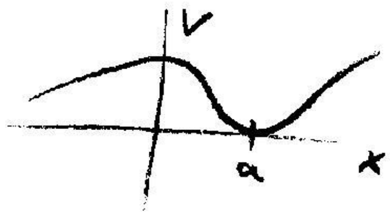
zwei $(*)$-Tests: • $f(x) = x^2$, $(x+a)^2 \stackrel{?}{=} \left(1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots\right)x^2 = x^2 + 2ax + a^2$, tatsächlich!

• $f(x) = e^x$, $e^{x+a} \stackrel{?}{=} \left(1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots\right)e^x = e^x\left(1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots\right) = e^x e^a$ ✓

Taylor-Anwendung in Physik:

meist nur bei allg. Betrachtungen

wie z.B. bei kleinen Schwingungen von V-Potential bei $x=a$:

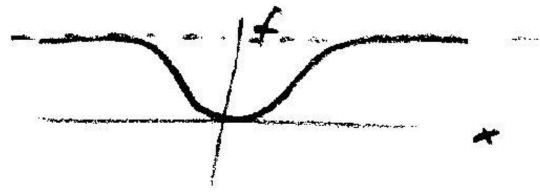


$$V(x) = \underbrace{\cancel{V(a)}}_{\text{egal in } V} + \underbrace{V'(a)}_{=0}(x-a) + \frac{V''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots$$

$$m\ddot{x} = -\partial_x V(x) = -V''(a)(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{V''(a)}{m}}$$

Warnung $\quad f(x) = e^{-1/x^2}$



$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (\ldots)e^{-1/x^2}, \quad f''(0) = 0 \quad , \ldots , \quad f^{(n)}(0) = 0$$

$$\text{Taylor} = 0 + 0 + 0 + \ldots \neq f(x)$$

Grund: $x=0$ ist pathologische Stelle

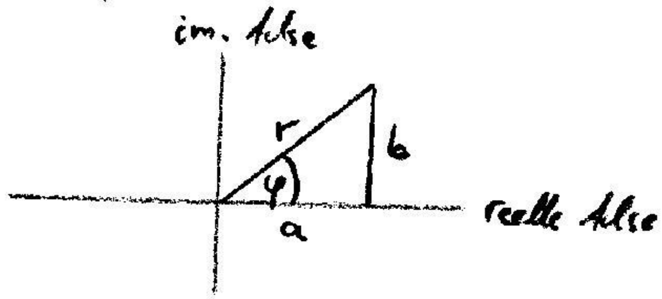
Komplexe Zahlen

sind i enthaltende Bildungen $\left(=: z, \text{ z.B. } z = \frac{1}{2-3i}\right)$

können stets auf die Form $z = \underbrace{a}_{Re(z)} + i\underbrace{b}_{Im(z)}$ gebracht werden

$$\left(\text{z.B. } z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2}{13} + i\frac{3}{13}\right)$$

können als Pkt in "komplexer Ebene" dargestellt werden:



mit $r = \sqrt{a^2+b^2} =: |z|$

ist $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$ $\quad (\varphi = \text{"Phase"})$

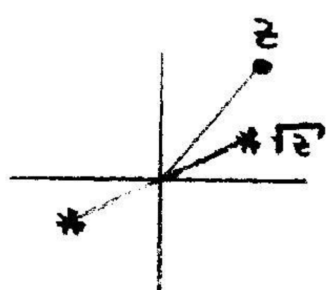
$$z^* := a - ib = re^{-i\varphi}$$

$$2\,Re(z) = a+ib + a-ib = z + z^* =: z + c.c.$$

Auch $z = re^{i(\varphi + 2\pi n)}$ gilt $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$

und ist bei Wurzeln wichtig:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi+2\pi n}{2}} = \sqrt{r}\,e^{i\left\{\begin{matrix}\varphi/2 \\ \varphi/2+\pi\end{matrix}\right.} \quad :$$



wegen $-1 = e^{i(\pi + 2\pi n)}$ ist mehrdeut. $\sqrt{-1} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

(($i := \sqrt{-1}$ ist falsch : $-1 = i \cdot i \overset{?}{=} \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = +1$))

5.4 Störungsrechnung

Ein Problem (Glg. für $f(x;\alpha)$) habe einen kleinen Parameter (α).
Kann die Lsg als Reihe in α-Potenzen suchen, d.h.

$$f(x,\alpha) = \underbrace{c_0(x)}_{f^{(0)}(x)} + \underbrace{c_1(x)\,\alpha}_{f^{(1)}(x)} + \underbrace{c_2(x)\,\alpha^2}_{f^{(2)}(x)} + \dots$$

in die f-Glg. einsetzen, um $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots$ zu bestimmen.

zur Notation: wir kennen

$$v(t;\lambda,g) = -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$$ als Lsg. von $\dot v = -g - \lambda v$, $v(0) = v_0$. (freier Fall + Reibung)

$$= -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)\left(1 - \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \dots\right)$$

$$= \underbrace{v_0 - gt}_{v^{(0)}(t)} \; \underbrace{- \lambda v_0 t + \frac{g}{2}\lambda t^2}_{v^{(1)}(t)} + O(\lambda^2) \qquad (*)$$

Bsp A $\boxed{\dot v = -g - \lambda v\,, \quad v(0) = v_0}$

weiß nichts von e-Fkt
λ sei klein (($[\lambda] = \frac{1}{\text{Zeit}}$, $\lambda \ll \frac{g}{v_0}$))
$v(t) = v^{(0)}(t) + v^{(1)}(t) + \dots$, in ER einsetzen
$\dot v^{(0)} + \dot v^{(1)} = -g - \lambda(v^{(0)} + \dots)$, $v^{(0)}(0) + v^{(1)}(0) = v_0$

"ER$^{(0)}$" $\Rightarrow \boxed{\dot v^{(0)} = -g\,, \quad v^{(0)}(0) = v_0} \Rightarrow v^{(0)} = v_0 - gt$

"ER$^{(1)}$" $\Rightarrow \boxed{\dot v^{(1)} = -\lambda v^{(0)} = -\lambda v_0 + \lambda g t\,, \quad v^{(1)}(0) = 0} \Rightarrow v^{(1)} = -\lambda v_0 t + \lambda \frac{g}{2} t^2$

$\rightsquigarrow v^{(0)} + v^{(1)} = (*)$. Es funktioniert!

Bsp B $\boxed{\ddot z = -\frac{g R^2}{(R+z)^2} \quad , \dot z(0) = v_0, \quad z(0) = 0}$

$g = \frac{\gamma M}{R^2}$, $g R^2 = \gamma M$, Wurfexperiment, um Abweichung von $K = -mg$ nachzuweisen

$R \gg \frac{v_0^2}{2g}$

$\frac{1}{R}$ sei klein:

$$\ddot z^{(0)} + \ddot z^{(1)} = -g \frac{1}{\left(1 + \frac{z^{(0)}}{R} + \frac{z^{(1)}}{R}\right)^2} \approx -g\left(1 - 2\frac{z^{(0)}}{R}\right)$$

$ER^{(0)} \Rightarrow \boxed{\ddot z^{(0)} = -g \quad , \quad \dot z^{(0)}(0) = v_0 \quad , \quad z^{(0)}(0) = 0} \Rightarrow z^{(0)} = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$

$ER^{(1)} \Rightarrow \boxed{\ddot z^{(1)} = 2g \frac{z^{(0)}}{R} \quad , \quad \dot z^{(1)}(0) = 0 \quad , \quad z^{(1)}(0) = 0} \Rightarrow \ldots$

usw.

— Ende §5.4

warum sind Reihenentw. (fast) immer möglich?

- weil wir nur mit Konstruktionen aus $x, e^x, i, f_n, f(g), \pm, \cdot, \div, \partial_x, \int \ldots$ ← SS07 zu arbeiten verstehen
- weil die Natur "weich" ist

— Ende Kap. 5

— Ende Klausur-Stoff