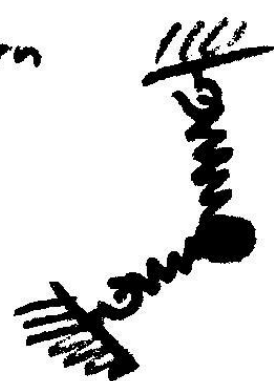


Nachtrag zur HT

← sy. Matrix
was ist H anschaulich?

e.g. Federn
im Raum



Lese H als Potential von $\vec{K} = -2H\vec{r}$

$$V = \vec{r} H \vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} -\vec{f}_1 \\ -\vec{f}_2 \\ -\vec{f}_3 \end{pmatrix}$$

[[check: $\partial_x V = (\partial_x \vec{r}) H \vec{r} + \vec{r} H (\partial_x \vec{r}) = 2\vec{r} H \vec{e}_x = 2\vec{r} \vec{f}_1 = -K, \checkmark$]]

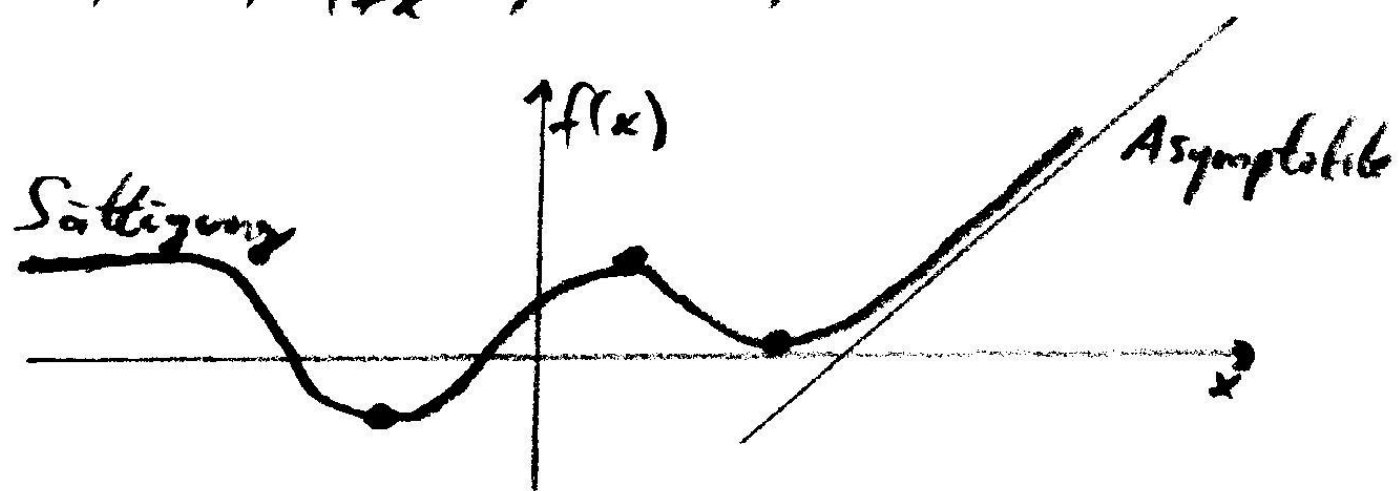
lasse z.B. Computer die [Äquipotenzialflächen $\vec{r} H \vec{r} = \text{const}$ malen.

$$\vec{r} H \vec{r} = \underbrace{\vec{r}^T D^T D H D^T \vec{r}} = \vec{r}' H' \vec{r}' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = \text{const}$$

→ (schief im Raum hängendes) Ellipsoid oder Hyperboloid

5. Funktionen

$x, x^2, \frac{1}{1+x^2}, c, s, e^x$ — nur wenige mehr werden benötigt



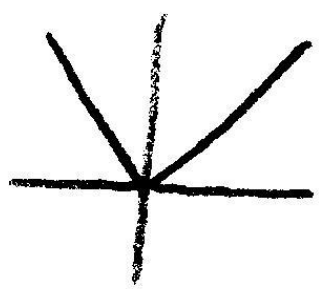
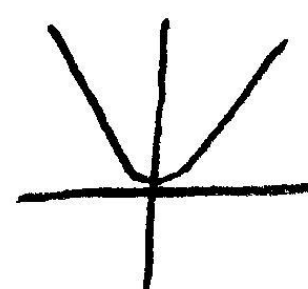
Funktionen der Natur sind (i.d. Regel) "weich",

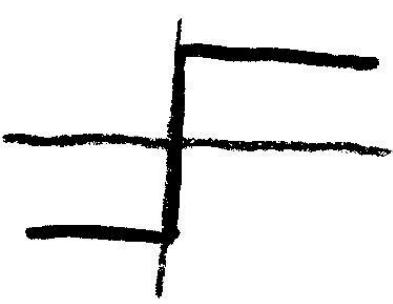
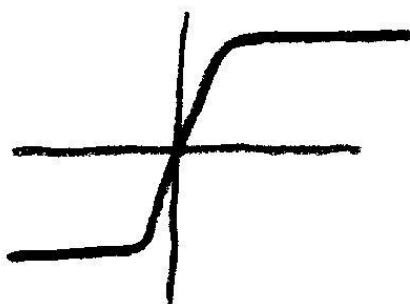
jedoch manchmal Intervall-beschränkt (z.B. r-Hölse).

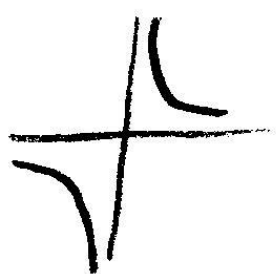
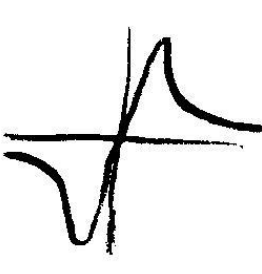
Haben wir Menschen eine pathologische Stelle auf dem Papier,
so kommt meist deren eingebettete Version der Wahrheit näher.

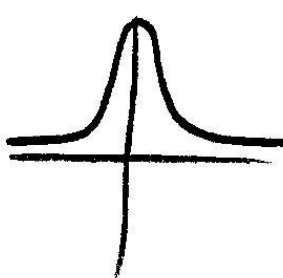
pathologische Stellen unter der Lupe

ε unmerk!

Knick, z.B. $|x|$,  ; $\sqrt{x^2 + \epsilon^2}$, 

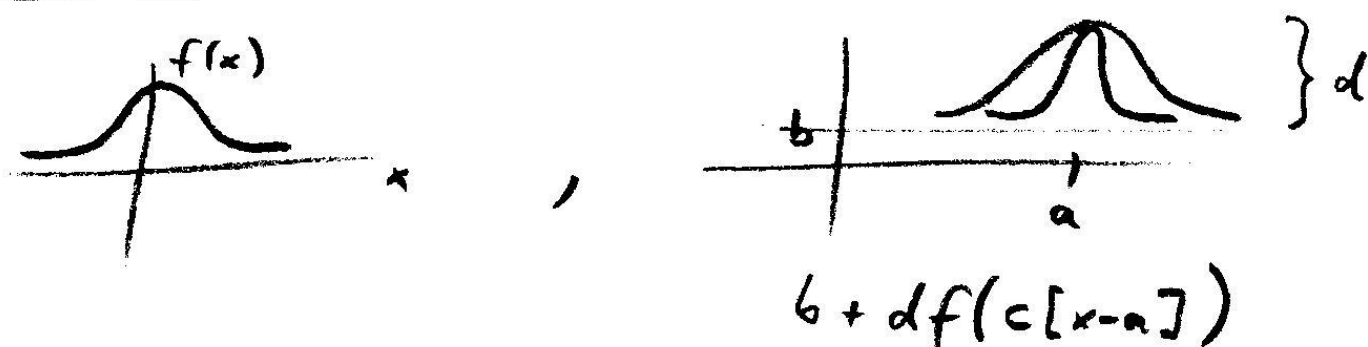
Stufe, z.B. $\frac{x}{|x|}$,  ; $\frac{x}{\sqrt{x^2 + \epsilon^2}}$, 

Pol, z.B. $\frac{1}{x}$, ; $\frac{x}{x^2+\epsilon^2}$, 

quadr. Singularität, z.B. $\frac{1}{x^2}$, ; $\frac{1}{x^2+\epsilon^2}$, 

5.1. Stetigkeitsänderungen, Vektoren

Verschieben etc.



Spiegelung $f(-x)$ an f-Achse, $-f(x)$ an x-Achse, $-f(-x)$ am Ursprung

gerade/ungerade

f ist gerade (g) $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

f ist ungerade (u) $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

(Bsp: g: $\cos(x)$, $\frac{1}{1+x^2}$; u: $\sin(x)$, $\frac{x}{1+x^2}$)

$$g \cdot u = u, \quad u \cdot u = g$$

$$\partial_x g = u, \quad \partial_x u = g$$

$$\left(\text{denn } \frac{g(-x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} = - \frac{g(x-\epsilon) - g(x)}{-\epsilon} \right)$$

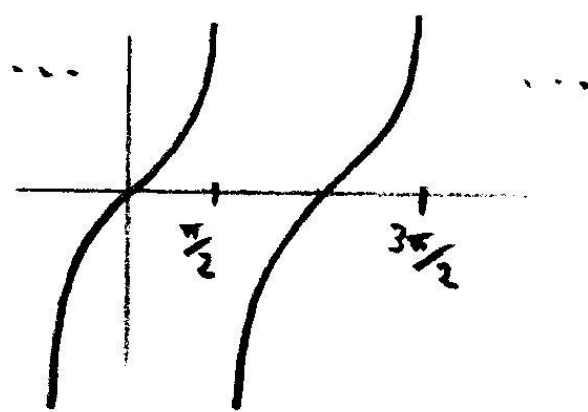
$$\text{allg.: } f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_g + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_u$$

g.u.-bsp. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

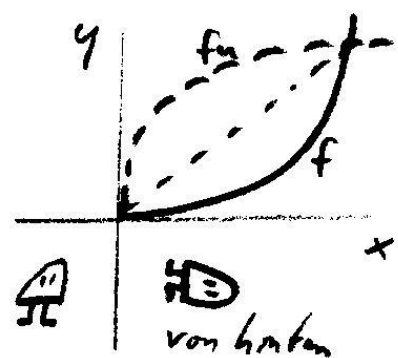
ist ungerade

π -periodisch

hat ∞ viele Pole



Umkehrfkt $f_u(x)$:= an Diagonale gespiegelter $f(x)$



$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \Rightarrow x &= f_u(y) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= f(x) \\ \Rightarrow x &= f_u(y) \end{aligned}} \right\} \quad \begin{aligned} y &= f(f_u(y)) \\ x &= f_u(f(x)) \end{aligned}$$

$$f_u'(x) = \frac{1}{f'(f_u(x))}, \text{ denn}$$

$$\partial_x \text{ auf } x = f(f_u(x)) \text{ gilt } 1 = f'(f_u(x)) \cdot f_u'(x) \quad \blacksquare$$

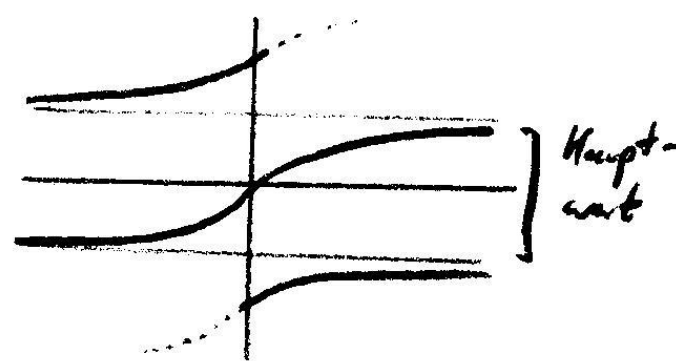
$$(\text{Bsp: } f=x^2, f_u=\sqrt{x}, f_u'=\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

Inv.-Bsp $f(x) = \tan(x)$, $f_u(x) =: \arctan(x)$

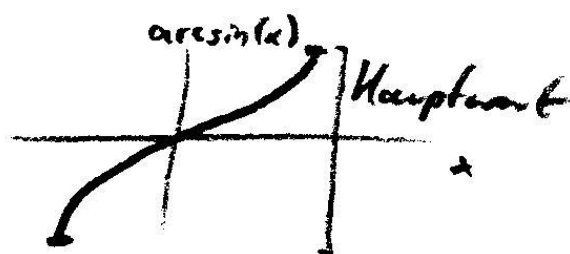
$$\partial_x \tan(x) = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{c^2 + s^2}{c^2} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\partial_x \arctan(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

↑ "Stammfunktion" zur Lorentz-Kurve



$$\partial_x \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



5.2. e-Funktion

14 Wünsche an jede neue Fkt - am Bsp dieser neuen.

↑ s.z.B. Gliederung in [Abramowitz/Stegun, Handbook of math. fcts]

•₁ Name: e-Funktion

•₂ Bezeichnung: $\exp(x)$ (vorläufig)

•₃ Bedarf: (a) Wachstum $\boxed{\dot{N} = \alpha N, N(0) = N_0}$ $[\alpha] = \frac{1}{\text{Zeit}}$

$$\text{Ans } N(t) = N_0 f(\alpha t); N_0 f' \cdot \alpha = \alpha N_0 f, N_0 f(0) = N_0 \\ \Rightarrow f \in \mathbb{R}: f'(x) = f(x), f(0) = 1$$

$$(b) m\dot{v} = -m\lambda v, v(0) = v_0$$

$$\text{Ans } v(t) = v_0 f(-\lambda t); -\lambda v_0 f' = -\lambda v_0 f, f(0) = 1$$

•₄ Def: $\exp(x) := \text{Lsg von } \boxed{f'(x) = f(x), f(0) = 1}$

•₅ Verlauf:  $f(1) := e \approx 2.72$

•₆ Funktionale Beziehung

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} =: g(x), \quad g(0) = 1, \quad g'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$$

$\Rightarrow g$ erfüllt auch $\boxed{\dots}$

$$\Rightarrow \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$$

$$\Rightarrow \exp(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \text{(\textit{denn: } } \exp\left(\frac{m}{n}\right) &= \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left(\left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n\right)^{\frac{m}{n}} \\ &= \left[\exp(1)\right]^{\frac{m}{n}} \quad \rangle \end{aligned}$$

•₇ Ableitung: e^x

•₈ Stammfunktion: e^x

•₉ Dgl: $\partial_x e^x = e^x, \quad \partial_x^2 e^{\pm x} = e^{\pm x}$

($\ddot{x} = +\omega^2 x$ mit Ansatz $A e^{+it} + B e^{-it}$)

($\dot{N} = \alpha N - \beta, N(0) = N_0$ mit (a) Ansatz (b) $N = u + a$ (c) $N = e^{xt}$)

$$\begin{aligned} \text{(d) direkt} \quad N(t) &= \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{N_0 - \beta}{\alpha} \right) e^{\alpha t} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{N_0 - \beta}{\alpha} \right) e^{\alpha t} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{N_0 - \beta}{\alpha} \right) e^{\alpha t} \quad \rangle \end{aligned}$$

•₁₀ Reihe: $f = c_0 + c_1 x$ in $\boxed{f' = f, f(0) = 1}$ einsetzen,

$$\text{gilt } c_1 = c_0 + c_1 x, \quad c_0 = 1$$

$\hookrightarrow$ oh! Brauche auch $+c_2 x^2$ in f !

$$c_1 + 2c_2 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

$\hookrightarrow$ oh! Brauche ... noch Potenzen!

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{in } \boxed{f' = f, f(0) = 1} \text{ einsetzen.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad m = n-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{n} c_{n-1} \quad \text{für } n=1, 2, \dots \quad \text{und } c_0 = 1$$

$$c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \dots \quad c_n = \frac{1}{n!} \quad \text{mit } n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (n \geq 1) \\ 0! := 1$$

$$\text{also } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad ; \quad \text{kann auch als exp-Def nehmen.}$$

die Summe hat $\forall x$ einen endlichen Wert

("die Reihe konvergiert $\forall x$ "), denn

geb. x , $a = \text{natürl. Zahl} \geq x$,

$$\sum \frac{1}{n!} x^n = 1 + \dots + \frac{a^{10a}}{(10a)!} \left[1 + \frac{a}{10a+1} + \frac{a^2}{(10a+1)(10a+2)} + \dots \right]$$

$$\text{und } [-] < 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 1.111\dots$$

•₁₁ Werte: z.B. pro Reihe

•₁₂ Asymptotik; $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{x^m} e^x \rightarrow \infty, \quad x^m e^{-x} \rightarrow 0 \quad (e^{-x} \text{ erschlägt jede Potenz})$$

e^x als Asymptotik: $\boxed{f' = f, f(0) = 1}$ per Computer,

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f(x) = (1+\varepsilon)f(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$f(x+N\varepsilon) = (1+\varepsilon)^N f(x)$$

$$x=0: \underbrace{f(N\varepsilon)} = (1+\varepsilon)^N$$

↳ nenne dies wieder x ; trotz $\varepsilon \rightarrow 0$: N beliebig groß

$$f(x) = e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N} \right)^N$$

ist auch e^x -Def; (eher exotisch)