jede Antwort-Matrix ist Tensor 2. Stufe

$$\vec j = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec E \;,\quad \vec k = -\underline{\underline{K}}\,\vec r \;,\quad \vec v = \underline{\underline{(\vec\omega\times\ )}}\,\vec r \;,\quad \vec L = \underline{\underline{I}}\,\vec\omega$$

Struktur: $\overrightarrow{\text{Antwort}} = (\text{Matrix})\ \overrightarrow{\text{Ursache}}$

$$\vec a = H\ \vec u \qquad (*)$$

Frage nach H' in $\vec a' = H'\vec u'$

D auf $(*)$ anwenden: $\vec a' = D\vec a \overset{!}{=} DH\vec u = DHD^TD\vec u = DHD^T\vec u'$

$\Rightarrow\ (H' - DHD^T)\,\vec u' = \vec 0 \quad \forall\, \vec u'$

$\Rightarrow$ H ist Tensor 2. Stufe

(($\vec a = \vec u = \mathbb{1}\vec u$: auch $\mathbb{1}$ ist Tens. 2. St.))

⇝ ein linearer Zusammenhang zw. 2 Vektoren definiert stets einen Tensor 2. Stufe

Bsp

z.B. Ziehen eines Schlittschuhläufers

$\vec v = H\vec k$

Bsp σ: e^- im Draht

Ladungs-Stromdichte $\vec j = \dfrac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}\perp\vec e}\,\vec e$

(Energie-, Teilchen-, ..)

in Δt fließt durch F das Volumen $F\cdot(v\,\Delta t)$, und die Anzahl $\frac{N}{V}\cdot F(v\,\Delta t)$ Teilchen

$$\vec j = \frac{q\cdot\frac{N}{V}\cdot F\cdot v\,\Delta t}{\Delta t\ F}\,\vec e = q\frac{N}{V}\,\vec v = q\frac{N}{V}\,Hq\vec E =: \underline{\underline{\sigma}}\,\vec E$$

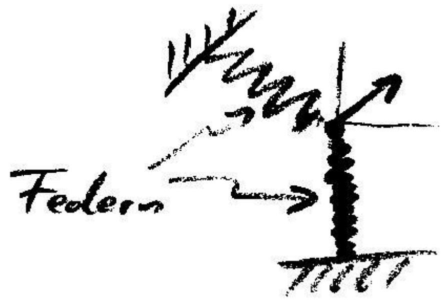
"Leitfähigkeitstensor"

($\vec E$-Richtung so, daß $\vec j \parallel \vec E$? s. 4.3 ; $j = \sigma E$

dann (Strom = Ladung pro Zeit = Fj)

$$I = \underbrace{F\frac{\sigma}{L}}_{\frac{1}{\text{"Widerst."}}}\ \underbrace{LE}_{\text{"Spannung"}} = \frac{U}{R} \qquad \text{"Ohm"}$$))

Bsp K:



Ursprung in Gleichgew.-Position

$$\vec K = -K\vec r + O(r^2)$$

(($\vec r$-Richtung so, daß $\vec K \parallel \vec r$? s. 4.3))

existiert ein Potential $V(\vec r)$?

2D: $K = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}$

$$\partial_x V \overset{!}{=} -K_1 = \kappa_{11}x + \kappa_{22}y \quad , \quad V = \frac{\kappa_{11}}{2}x^2 + \kappa_{12}xy + f(y)$$

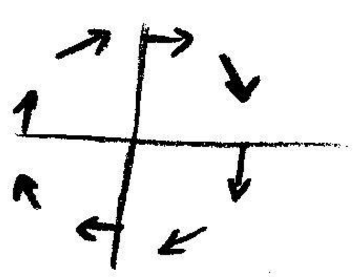
$$\partial_y V = \kappa_{12}x + f'(y) \overset{!}{=} -K_2 = \kappa_{21}x + \kappa_{22}y$$

$\Rightarrow$ nur für $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ existiert $V = \frac{\kappa_{11}}{2}x^2 + \frac{\kappa_{22}}{2}y^2 + \kappa_{12}xy$

allg: $K = K^T \Leftrightarrow \vec K = -K\vec r$ hat $V = \frac{1}{2}\vec r K \vec r$

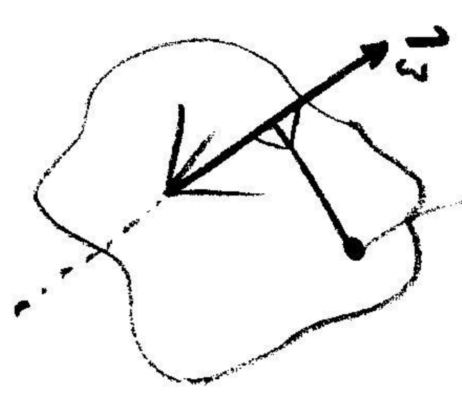
((der 2. Term in $K = \frac{1}{2}(K+K^T) + \frac{1}{2}(K-K^T)$

gilt rotierende Kraft: $\vec K_{2.\text{Term}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \kappa_{12}-\kappa_{21} \\ \underbrace{\kappa_{21}-\kappa_{12}}_{\equiv 2\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha y, -\alpha x)$))



Bsp I: "Trägheitstensor"

starrer Körper
Achse $\vec\omega$ verlötet
Ursprung auf Achse



a-ter Massenpkt

$$\vec L = \sum_a \vec L_a = \sum_a m_a \vec r_a \times \vec v_a =: I\vec\omega \qquad \text{definiert } I$$

falls $\vec L_a = I_a\vec\omega$, dann $\vec L = \sum_a I_a \vec\omega$, d.h. $I = \sum_a I_a$

(... Bsp I)

bac-cab : $\vec{\omega}(\vec{r}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega})$

$$\vec{L}_a = m_a \vec{r}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_a) = \underbrace{m_a \left(r_a^2 \mathbb{1} - \vec{r}_a \circ \vec{r}_a \right)} \vec{\omega}$$

$$I_a = m_a \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2 - y^2 & -yz \\ -zx & -zy & r^2 - z^2 \end{pmatrix}$$ alles Index a

$$\Rightarrow I = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ & x^2 + z^2 & -yz \\ \text{sy.} & & x^2 + y^2 \end{pmatrix}_a$$

es ist $\vec{L}' = I' \vec{\omega}'$ mit $I' = D I D^T$

((denn: $\vec{L}' = D\vec{L} = D I \vec{\omega} = D I D^T D \vec{\omega} = I' \vec{\omega}'$))

(($\vec{\omega}$ so, daß $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$? d.h. daß $I\vec{\omega} = \text{const} \cdot \vec{\omega}$? s. 4.3))

Philo: I-Komponenten hängen von Position des Körpers, und damit i.A. von der Zeit ab.
→ Drehmomente $\partial_t \vec{L} = \vec{r} \times \vec{K}$ machen Achsen-Lager kaputt! "Auswuchten ≙ Achse ∥ Hauptachse"

Schwerpkt des st. Kö.: $M = \sum_a m_a$

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_a m_a \vec{r}_a$$

4.3. Hauptachsentransformation

gegeben: ein symm. Tensor H, d.h. $H^T = H$

Beh.: stets existiert (mind.) ein D derart, daß

$$H' = D H D^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$, d.h. H' diagonal wird.

Frage clever aufschreiben:

$$\begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec f_1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ H\vec f_1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec f_1 H \vec f_1 & \vec f_1 H \vec f_2 & 1\ 3 \\ \vec f_2 H \vec f_1 & \vec f_2 H \vec f_2 & 2\ 3 \\ \vec f_3 H \vec f_1 & 3\ 2 & 3\ 3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ es muß $H\vec f_1 = \lambda_1 \vec f_1$, $H\vec f_2 = \lambda_2 \vec f_2$, ... sein

$\Rightarrow$ müssen also $H\vec f = \lambda \vec f$ lösen

und 3 orthonormierte $\vec f$'s mit je zugehörigen reellen λ's erhalten.

Das geht immer, denn:

A) $\vec f$ ist normierbar ($H\vec f = \lambda \vec f$ legt Betrag nicht fest)

B) $\vec f$'s zu verschiedenen λ's sind automatisch orthogonal:

$H\vec f_1 = \lambda_1 \vec f_1 \quad \Rightarrow \quad 0 = H\vec f_1 - \lambda_1 \vec f_1$ multipl. m. $\vec f_2$ v. links

$$0 = \underbrace{\vec f_2 H \vec f_1}_{} - \lambda_1 \vec f_1 \vec f_2 \qquad H\vec f_2 = \lambda_2 \vec f_2$$

$$= (H^T \vec f_2)\vec f_1 = (H\vec f_2)\vec f_1 = \lambda_2 \vec f_2 \vec f_1$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)\vec f_1 \vec f_2 \qquad \text{qed} \blacksquare$$

C) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ können (ohne $\vec f$-Kenntnis) aus einer kubischen Glg. erhalten werden, denn das hom. Gl.-Syst $(H - \lambda \mathbb{1})\vec f = \vec 0$ ist nur lösbar, wenn

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22}-\lambda & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(H_{11} + H_{22} + H_{33}) - \lambda(H_{11}H_{22} + H_{11}H_{33} + H_{22}H_{33}) + \det(H)$$

$= 0$ ist.

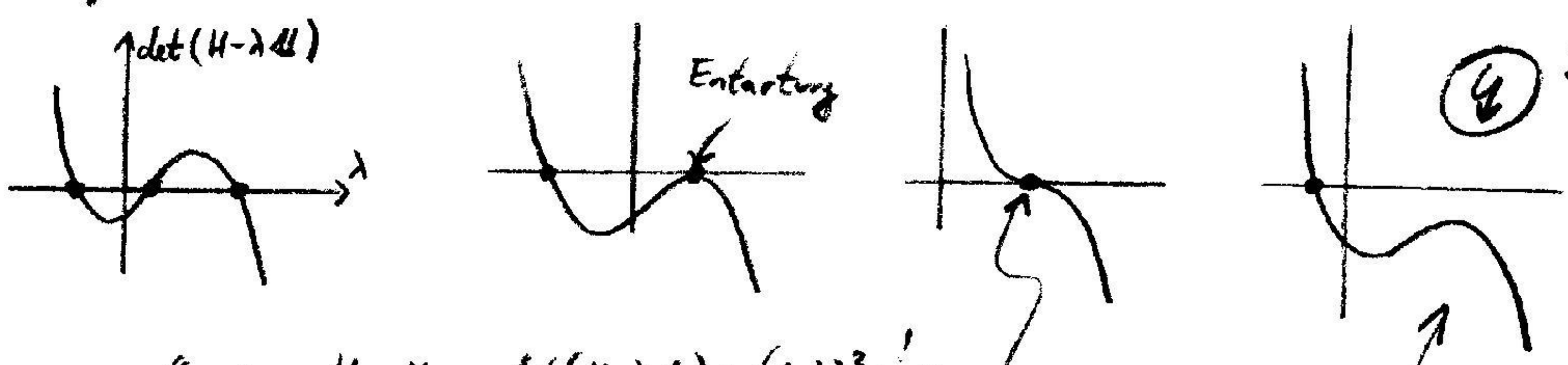
(($\begin{pmatrix} -\vec a- \\ -\vec b- \\ -\vec c- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | \\ \vec f \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt $\vec a \vec f = \vec b \vec f = \vec c \vec f = 0$ zu erfüllen.

$\vec f \neq \vec 0$ nur möglich, wenn $\vec a, \vec b, \vec c$ in einer Ebene,

d.h. Spatprodukt = Determinante = 0))

$$= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$

Möglichkeiten:



④ 2 komplexe EW'e

((z.B. $H = \mathbb{1}$, $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$;
$\lambda = 1$ ist dreifach entartet))

((In $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda^2-2p\lambda+q) = 0$
und in $\lambda_{2/3} = p \pm \sqrt{p^2-q}$ könnte $q > p^2$ sein.
Dann ist i nötig, $i \cdot i = -1$, und $\lambda_{2/3} = p \pm i\sqrt{q-p^2}$))

D) die EW $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind <u>reell</u>, d.h. ④ tritt nie ein; denn:

$$H\vec{f} = \lambda\vec{f} \quad \Rightarrow \quad \lambda \vec{f}^{*}\vec{f} = \vec{f}^{*} H \vec{f} = (H^T \vec{f}^{*})\vec{f} = \lambda^{*} \vec{f}^{*}\vec{f}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \lambda^{*} \qquad ((\ \lambda = a+ib = a-ib = \lambda^{*} \Rightarrow b = 0\ ))$$

$$((\ \text{Größe}^{*} = \text{Größe}\big|_{i\to -i}\ ))$$

E) bei Entartung ($\frac{2}{3}$ λ's gleich) ist ein orthonormiertes $\frac{2}{3}$-Bein <u>wählbar</u>:

$$\left.\begin{array}{l} H\vec{f}_1 = \lambda\vec{f}_1 \\ H\vec{f}_2 = \lambda\vec{f}_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{jede LK aus } \vec{f}_1, \vec{f}_2 \text{ ist EV zu EW } \lambda \\ \Rightarrow \text{also wähle zu } \lambda \text{ zwei orthogonale } \vec{f}\text{'s} \end{array}$$

$$H\vec{f}_3 = \lambda_3\vec{f}_3$$

HT-Rezept

I $\quad H = H^T$ erfüllt? (<u>sieht</u> man: H symmetrisch)

II $\quad$ löse $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = 0$
(kubische Glg: λ_1 raten. dann $\det = (\lambda_1-\lambda)$(quadr. Glg.))

III $\quad$ Probe: $Sp(H) \overset{?!}{=} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ (und auch: $\det(H) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$)

IV $\quad$ löse $(H-\lambda_1\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}_1$. normiere $\vec{f}_1$ ($|\vec{f}_1| = 1$).
dito für λ_2. dito für λ_3.

V $\quad$ Probe: Orthogonalität, d.h. $\vec{f}_1\vec{f}_2 = \vec{f}_1\vec{f}_3 = \vec{f}_2\vec{f}_3 = 0$

VI $\quad$ Rechtssystem? (evtl ein $\vec{f}$-Vorzeichen ändern) (a) malen (b) $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$ (c) $\det(D) = +1$

VII $\quad$ Resultat notieren: $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} — \vec{f}_1 — \\ — 2 — \\ — 3 — \end{pmatrix}$