

Drehachse und -winkel

$$DD^T = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1 & - \\ -\vec{f}_2 & - \\ -\vec{f}_3 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$D^T D = \begin{pmatrix} -\vec{e}'_1 & - \\ -\vec{e}'_2 & - \\ -\vec{e}'_3 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

⇒ Orthogonalisierung : $DD^T = D^T D = \mathbb{1}$

Rechtssystemerhaltung: $\det(D) = 1$ (denn: $\det(D) = \vec{f}_1 \cdot (\vec{f}_2 \times \vec{f}_3)$,
s. Skalarprodukt Kap. 1; Skript S. 10)

Winkeltrave: $D(\vec{a} \times \vec{b}) = (D\vec{a}) \times (D\vec{b})$

$D \rightarrow$ Achse $\vec{e}$: $D\vec{b} = \vec{b}$, $\vec{e} = \vec{b}/b$

$D \rightarrow$ Winkel φ : $S_F(D) = 1 + 2\cos(\varphi)$

$\vec{e} \cdot ((D\vec{f}) \times \vec{f}) = \sin(\varphi)$ mit $\vec{f}$ Einheitsvektor
 $\perp \vec{e}$

$\vec{e}, \varphi \rightarrow D$: $D = \underset{\uparrow \cos(\varphi)}{c} \mathbb{1} + (1-c) \vec{e} \otimes \vec{e} - \underset{\uparrow \sin(\varphi)}{s} (\vec{e} \times \dots)$ (*)

Strategie: (*) verifizieren $\rightarrow$ Rest folgt.

(*) ist vektoriell formuliert, also genügt Nachweis eines Spezialfalles.

zu z.B. $\vec{e} = (0, 0, 1)$

ist $\vec{e} \otimes \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $(\vec{e} \times \dots) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

und somit $(*)_{\text{rhs}} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_{\vec{e}, \varphi}$ qed.

q.e.d.
quod erat demonstrandum
was zu zeigen war

$\vec{e} = (u, v, w)$ liefert die allgemeine Drehmatrix:

$$D_{\text{allg}} = \begin{pmatrix} c + (1-c)u^2 & (1-c)uv + sw & (1-c)uw - sv \\ (1-c)vu - sw & c + (1-c)v^2 & (1-c)vw + su \\ (1-c)wu + sv & (1-c)vw - su & c + (1-c)w^2 \end{pmatrix}$$

aus Dally folgen nur die restlichen Eigenschaften S.28 oben:

$$\text{z.B. } S_p(D) = 3c + (1-c) \underbrace{(u^2+v^2+w^2)}_{=1} = 1 + 2c \quad (\text{immer!})$$

D → Adse: Eigenwertproblem

$(D-1)\vec{b} = \vec{0}$ ist homogenes Gl. system

legt $|\vec{b}|$ nicht fest, also ist (zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$)

eine der 3 Gl. $(D-1)\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abhängig (folgt aus den beiden anderen)

$(D-1)\vec{b} = \vec{0}$ ist Spezialfall des Eigenwertproblems,

d.h. der Frage, welche Elemente sich bei Op.-Anw. reproduzieren:

$$(\text{lin. Op.})(\text{Element}) = \text{Faktor} \left(\begin{smallmatrix} \text{gleiches} \\ \text{Element} \end{smallmatrix} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} H & \vec{\psi} & = E \vec{\psi} \\ \uparrow & & \\ \text{gegeben} & & \end{array}$$

gesucht: Eigenvektor (EV) $\vec{\psi}$
Eigenwert (EW) E

((z.B. hat $-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2$ die EV $\sim \sin(kx)$ mit EW $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$))
((Bzgl der $\partial \eta$ ist $\psi = H\psi$))

hier: eine Drehmatrix hat stets den EW +1
und die Drehachse als zugehörigen EV.

bessere Vektor-Def.

vgl. Kap. 1; Skript S.2

Tripel a_j sind Vektoren, wenn unter Koord.-System-Drehung (D) die Änderung der Elemente in $a'_j = D_{jk} a_k$ (sowie Addition und λ -Multiplikation) physikalisch sinnvoll ist

oder: Box S.2 und "Pfeile" sind Koordinaten-Dreh-anfällige Skalenspinoren gemäß $\vec{a}' = D\vec{a}$

4.2 Tensoren 2. Stufe

$H_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ist Tensor n -ter Stufe $\Leftrightarrow$ die Elemente bei Ko-Syst Drehung (D) übergehen in

$$H'_{i_1 \dots i_n} = D_{i_1 k_1} D_{i_2 k_2} \dots D_{i_n k_n} H_{k_1 \dots k_n}$$

Stufe n	Name	Schema	Transformation
0	Skalar	eine Zahl c	$c' = c$
1	Vektor	Tripel $\vec{a}$	$\vec{a}' = D \vec{a}$
2	Tensor 2. St.	Matrix H	$H' = D H D^T$ (s.u.)
3	z.B. ε_{ijk}	Kubus	s.o.

$n=0$ Skalare sind $m, q, c, T_{\text{emp}}, T, V(\vec{r}), \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}),$
 $S_p(H)$ (s.u.), $\det(H)$ (s.u.)

$n=1$ Vektoren, s. halbes WS

$n=2$ Tensoren 2. Stufe

$$H'_{i_1 i_2} = D_{i_1 k_1} D_{i_2 k_2} H_{k_1 k_2} = D_{i_1 k_1} H_{k_1 k_2} (D^T)_{k_2 i_2}$$

$$\text{d.h. } H' = D H D^T$$

((verstehen jetzt: $S_p(H') = S_p(D H D^T) = S_p(H D^T D) = S_p(H)$
 und $\det(H') = \det(D) \det(H) \det(D^T) = \det(H)$))

Philo: Waren immer stolz auf vektoruell formulierte Zs.-hänge.
 Respektieren die Invarianz der Natur unter Ko-Syst-Drehungen.
 Jede Natur-Größe muß sich verhalten unter Drehungen,
 ist also Skalar oder Vektorcomp. oder Tensorcomp.

jede phys. Größe ist als Komponente
 eines Tensors zu identifizieren