

4. Tensoren

Fremdwort?

zur Bezeichnung: Vektor = Tensor 1. Stufe ; 2. Stufe , ...
 (a, a, a) $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$

Vektoren sind "Pfeile".

aber was ist ein "Pfeil"?

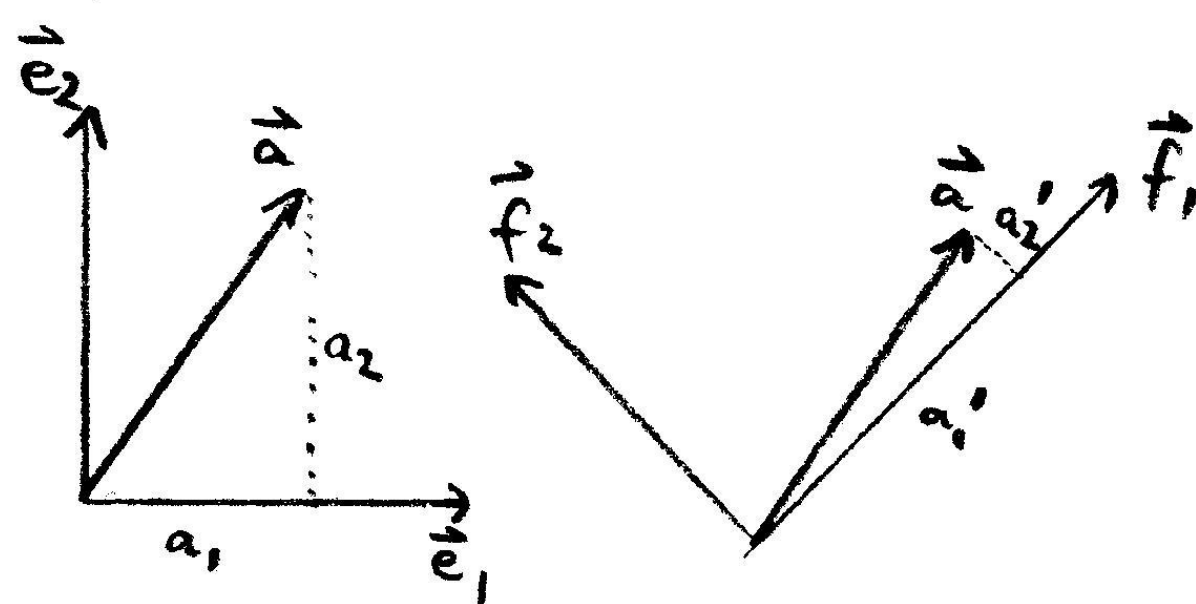
→ etwas, was in gedrehtem System andere Zahlen bekommt.

4.1 Drehmatrix

Koord.-System - Drehung.

Pfeil bleibt stehen.

Komponenten ändern sich.



$$"\vec{a}'" := (a_1', a_2', a_3')$$

(hier: Vektor vertikal aufschreiben von Vorteil)

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1' = \vec{f}_1 \cdot \vec{a} \\ a_2' = \vec{f}_2 \cdot \vec{a} \\ a_3' = \vec{f}_3 \cdot \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 a_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \dots \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 a_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 & \dots & \dots \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}}_{\substack{(\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1, \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2, \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot \vec{a} \\ = D}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

= Matrix D angewandt auf $\vec{a}$

d.h. D-Zeile $\cdot \vec{a}$, nach "Zeile mal Spalte" - Regel:

$$\text{allg.} \quad \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

Operator - Element = neues Element

$$\text{kurzer: } \vec{a}' = D \vec{a}, \quad D = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -\vec{f}_2- \\ -\vec{f}_3- \end{pmatrix}$$

D-Zeilen: $\vec{f}$'s im alten System

D-Spalten: $\vec{e}$'s im neuen

$$\text{kurz: } a_j' = \underbrace{D_{jk}}_{\substack{\text{Zeile} \\ \text{Spalte}}} a_k, \quad D_{jk} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_k$$

es ist $(D \lambda \vec{a})_j = D_{jk} \lambda a_k = (\lambda D_{jk}) a_k = \lambda (D \vec{a})_j$

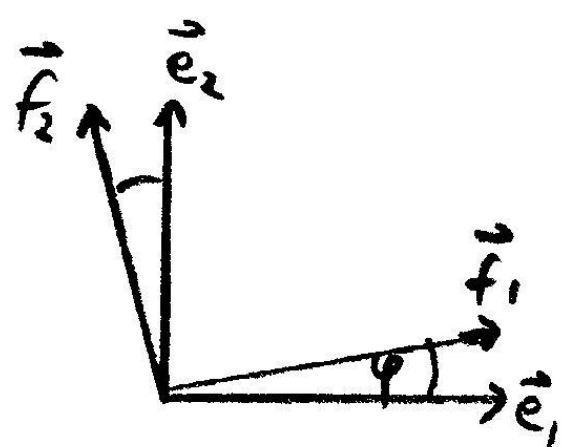
allg.: $\lambda \cdot \text{Matrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$

es ist $(D(\vec{a} + \vec{b}))_j = D_{jk} (a_k + b_k) = D\vec{a} + D\vec{b}$

$\Rightarrow$ Matrix-Anwendung ist lineare Operation.

3 elementare D's

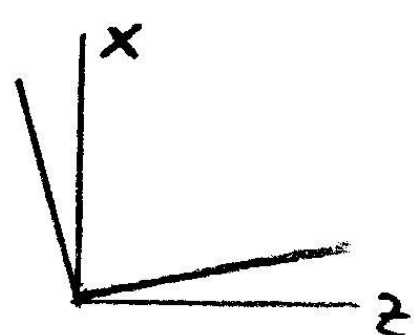
Drehung um Winkel φ
um z-Achse



$c := \cos(\varphi)$ $s := \sin(\varphi)$

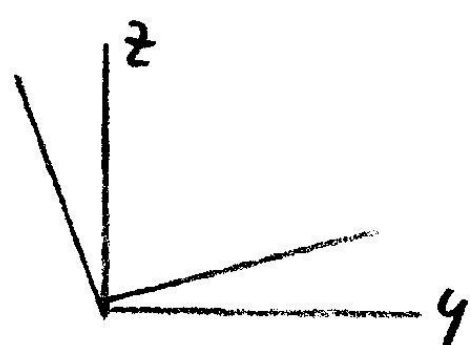
$$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ um y-Achse



$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

$\therefore$ um x-Achse



$$D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

2 Drehungen nacheinander



$$\begin{matrix} \vec{g}' & \xleftarrow{(2)} & \vec{f}' & \xleftarrow{(1)} & \vec{e}' \\ \vec{a}'' & & \vec{a}' & & \vec{a} \end{matrix}$$

$$\vec{a}'' = D^{(2)} \vec{a}', \quad \vec{a}' = D^{(1)} \vec{a}$$

$$\vec{a}'' = D^{(2)} (D^{(1)} \vec{a}) = \text{"} D^{(2)} D^{(1)} \text{"} \vec{a}$$

$$a_j'' = D_{jl}^{(2)} (\dots)_l = D_{jl}^{(2)} D_{lk}^{(1)} a_k$$

$$D_{jk}^{\text{ges.}} = \left(\begin{matrix} j\text{-te Zeile} \\ \text{von } D^{(2)} \end{matrix} \right) \cdot \left(\begin{matrix} k\text{-te Spalte} \\ \text{von } D^{(1)} \end{matrix} \right)$$

allg. $\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right) := \left(\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \right)$

$$(AB)_{jk} = A_{jl} B_{lk}$$

Reihenfolge wichtig: $AB \neq BA$!

Spur

$$Sp(A) := A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{jj}$$

$$Sp(AB) = Sp(BA)$$

$$\text{denn: } (AB)_{jj} = A_{jk} B_{kj} = B_{kj} A_{jk} = (BA)_{kk}$$

$$\text{also: } Sp(ABC) = Sp(CAB) \quad \text{"zyklische Invarianz der Spur"}$$

Umgebung mit Matrizen

$$1. (A\vec{a})_i = A_{jk} a_k$$

$$2. (AB)_{jk} = A_{jl} B_{lk}$$

$$3. (\lambda A)_{jk} = \lambda A_{jk}$$

$$4. (A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$$

$$5. Sp(A) = A_{jj} \Rightarrow Sp(AB \dots C) = Sp(B \dots CA)$$

$$6. \det(A) = \varepsilon_{jkl} A_{1j} A_{2k} A_{3l}$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad (\text{Zitat})$$

$$7. (A^T)_{jk} := A_{kj}, \quad A^T = A \Leftrightarrow A \text{ ist "symmetrisch"}$$

$$A^T = -A \Leftrightarrow A \text{ ist "antisymmetrisch"}$$

$$\Rightarrow \vec{b} \cdot (A\vec{a}) = (A\vec{a}) \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} \vec{a} \cdot A^T \vec{b}$$

$$\text{denn: } A_{jk} a_k b_j = a_k (A^T)_{kj} b_j$$

$$\text{Anwendung: } \vec{a}'^2 = (D\vec{a}) \cdot D\vec{a} = \vec{a} \underbrace{D^T D}_{=1} \vec{a} = \vec{a}^2, \text{ s. unten}$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = \vec{a} D^T D \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{"Invarianz des Skalarprod. unter Drehung"}$$

$$8. A^{-1} := \text{die } A^{-1}A = \mathbb{1} \text{ erfüllende Matrix}$$

$$9. \text{Dyadisches Produkt } (\vec{a} \circ \vec{b})_{jk} := a_j b_k$$

$$\Rightarrow [(\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c}]_i = (\vec{a} \circ \vec{b})_{jk} c_k = a_j b_k c_k = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \vec{c})]_i$$

$$\text{kurz: } (\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \vec{c})$$

$$10. (\vec{a} \times \dots) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{denn: } (\vec{a} \times \dots) \vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \checkmark$$