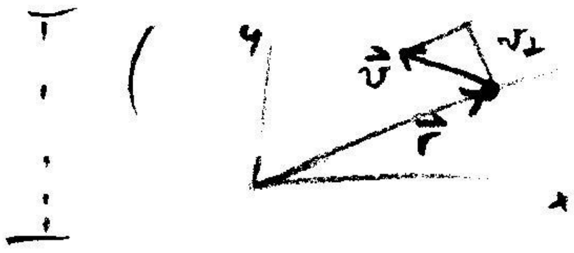
"Drehwucht" = Drehimpuls = $\vec L := \vec r \times \vec p = m\vec r \times \vec v = m\vec r \times \vec v_\perp$

(

$\vec L = \vec e_3\, r m v_\perp = m\vec r \times \vec v_\perp = m\vec r \times \vec v$.

ein Teilchen hat $\vec L$ auch ohne Stange)

$\vec L$ ist vom Ursprung abh.!

$$\partial_t \vec L = m\dot{\vec r} \times \vec v + m\vec r \times \dot{\vec v} = 0 + \vec r \times \vec K$$

"Drehmoment"

(allg., egal wo Ursprung ist)

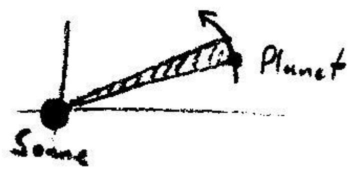
wenn $\vec K \sim \vec r$ (oder $\vec r = 0$, oder $\vec K = 0$) ("Zentralkraft": $\vec K = K(\vec r)\frac{\vec r}{r}$), dann

$\dot{\vec L} = 0$, d.h. $\vec L = \text{const}_t$

"Drehimpulserhaltung" für 1 T. ((s. auch Ü5))

Flächensatz (Kepler 1571-1630, Newton 1643-1727)

Planet (m) um Sonne (= Ursprung)



$\vec L$ behält Richtung (m bleibt in Ebene $\perp \vec L$) und Betrag

$$\text{const}_t = \frac{1}{2m}|\vec L| = \frac{1}{2}|\vec r \times \vec v| = \frac{1}{2} r v_\perp = \frac{r \cdot dr_\perp}{2\, dt} = \frac{d\,\text{Fläche}}{dt}$$

T und V

Wollen "Energie" einer Physik ergründen — multipliziere deren Bew.gl. mit der einmal weniger abgeleiteten Unbekannten.

Hier: $\vec v \cdot [\, m\ddot{\vec r} = \vec K \,]$

$$m\vec v \cdot \dot{\vec v} = \vec v \cdot \vec K$$

$$\left(\frac{m}{2}\vec v^2\right)^{\cdot} = \frac{d\vec r \cdot \vec K}{dt} = \frac{dA}{dt}$$

mit dA = am T. in dt verrichtete Arbeit

Energiezufuhr erhöht also die Größe

$$\frac{m}{2}\vec v^2 =: T = \text{kinetische Energie}$$

Kann man auch $\vec v \cdot \vec K = (\text{etwas})^{\cdot}$ schreiben?

"Potential" ("pot. E.")

wenn es zu gegebenem $\vec K(\vec r)$ eine Hilfsfunktion $V(\vec r)$ derart gibt, daß $\vec K(\vec r) = -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$ ((= $-\vec\nabla V$)) gilt, dann ist $\vec v \cdot \vec K = -\vec v \cdot (\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) = -\partial_t V(\vec r(t))$

und folglich $\partial_t (T + V) = 0$

und somit $\frac{m}{2}\vec v^2(t) + V(\vec r(t)) = \text{const}_t = E$ ("Energieerhaltungssatz" der Mechanik eines Tlch.)

Gebrauch der Erhaltungssätze:

$$\vec P_{\text{vor Stoß}} = \vec P_{\text{nach Stoß}}$$

$$\vec L_{\text{start}} = \vec L_{\text{später}}$$

$$(T+V)_{\text{start}} = (T+V)_{\text{später}}$$

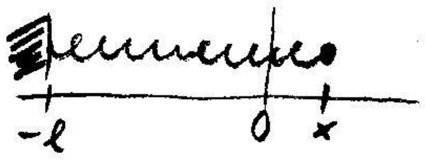
<u>V's</u> A) $\vec K = (0,0,-mg) \overset{?!}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$

V unabh. von x, y; $V'(z) = mg$, $V(z) = mgz + C$ egal

wähle $C = 0$ $\Rightarrow$ $V(z) = mgz$

((allg.: $[V]$ = Kraft · Länge = Energie
mühsame Positionsänderung erhöht V
manchmal ist E-Satz schneller als Bew.gl.-Lösen))

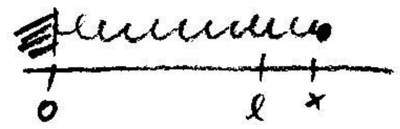
B) "ideale Feder" := { hat keine Masse, keine Eigenschwingung,
erfüllt a=r perfekt, hat Daten κ, ℓ }
(Kraft = κ · Auslenkung)



$K_1 = -\kappa x \overset{?!}{=} -\partial_x V(x)$

$\Rightarrow V(x) = \frac{\kappa}{2} x^2 \cancel{+ C}^{\,0}$

Translation um $+\ell$, $x \to x - \ell$



$K_1 = -\kappa (x - \ell)$

$V(x) = \frac{\kappa}{2}(x-\ell)^2$

V ist über Feder verteilt: Hälfte hat 2κ

($\kappa \cdot a = K = \kappa_{\text{Hälfte}} \cdot \frac{a}{2}$, )

und es ist tatsächlich $V = \frac{\kappa}{2} a^2 \overset{?!}{=} 2 \, \frac{(2\kappa)}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2$

... weiter halbieren, bis zu atomaren Auslenkungen.

Folglich hat $\vec K = \vec e_{m \to \text{Bef.}} \kappa \, (r_{mB} - \ell)^2$

das Potential $V = \frac{\kappa}{2} (r_{m\text{Bef.}} - \ell)^2$

(check: per $-(\partial_x V, \ldots, \ldots)$ zu $\vec K$ gelangen!)

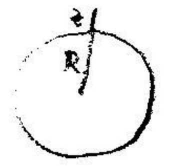
c) $\vec{K} = -\gamma m M \frac{\vec{r}}{r^3} \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$

Ansatz: $V(\vec{r}) = f(r)$

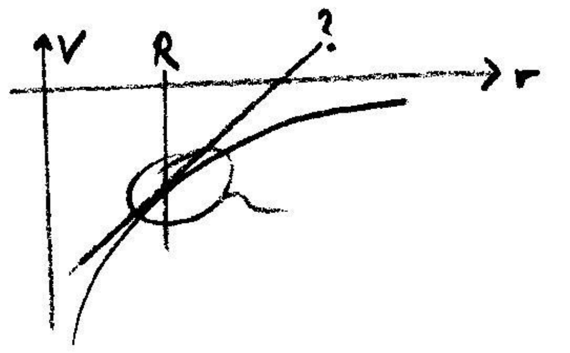
$-\partial_x V = -f'(r) \cdot \partial_x \sqrt{x^2+y^2+z^2} = -f'(r)\frac{x}{r} \overset{!}{=} -\gamma m M \frac{x}{r^3}$

$\Rightarrow f'(r) = \frac{\gamma m M}{r^2}$, $f = \frac{c}{r}$, $f' = -\frac{c}{r^2}$, $c = -\gamma m M$, $f = -\frac{\gamma m M}{r} + A$

$\Rightarrow \underline{\underline{V(\vec{r}) = -\frac{\gamma m M}{r}}}$ "Gravitations-Potential"

((

, $z \ll R$, $V = -\frac{\gamma m M}{R+z} = -\frac{\gamma m M (R-z)}{R^2 - z^2} \approx const_z + m \overbrace{\frac{\gamma M}{R^2}}^{= g} z + O(z^2)$



oder: durch Reihenentwicklung

$\frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} + Az + O(z^2)$

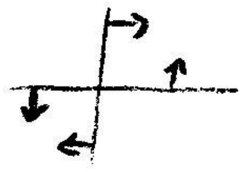
$1 \overset{!}{=} (R+z)\left(\frac{1}{R} + Az + \dots\right)$

$= 1 + RAz + \frac{z}{R} + O(z^2)$

$\Rightarrow A = -1/R^2$))

D) komponentenweises Ableiten [s.a. Ü18]

D1) 2D, $\vec{K}(\vec{r}) = (\alpha y, \alpha x) \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V)$



$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha y \Rightarrow V = -\alpha x y + f(y)$

$\partial_y V = -\alpha x + f'(y) \overset{!}{=} -\alpha x \Rightarrow f = const_{x,y}$

$\Rightarrow \underline{\underline{V = -\alpha x y}}$

D2) $\vec{K} = \alpha(x-y, x-y)$

$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$, $V = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \alpha x y + f(y)$

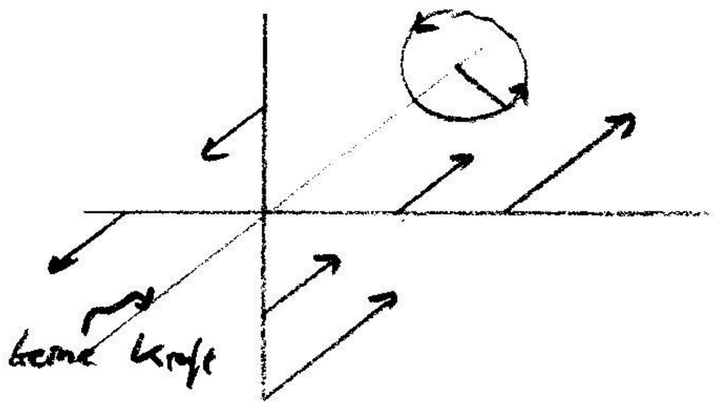
$\partial_y V = \alpha x + f'(y) \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$ nicht erfüllbar!

$\vec{K}$ hat kein V.

E-Satz gilt nicht:

Pendel-E nimmt zu

(es gibt solche $\vec{K}$'s)



Vermutung: $\vec{K}$ hat V $\Leftrightarrow$ sich auf der $\vec{K}$-"Strömung" nichts dreht

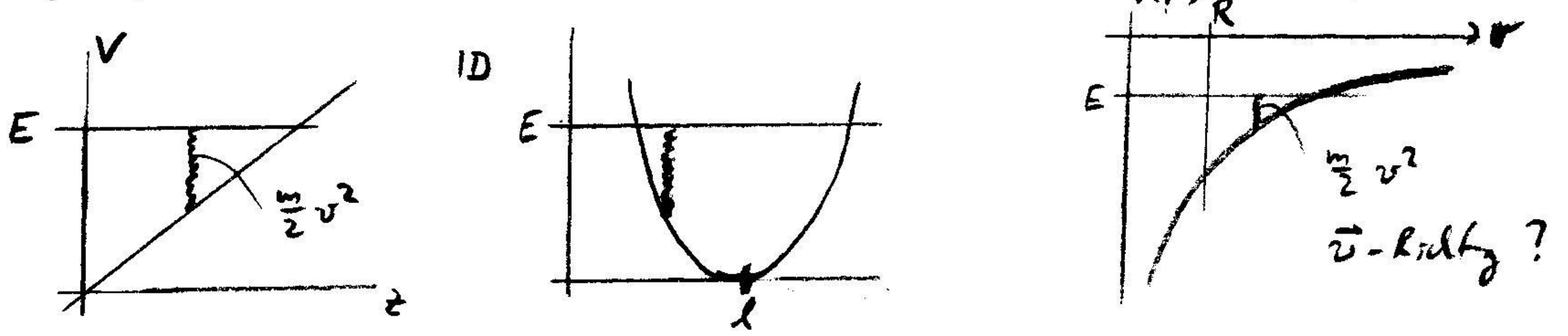
(SS: rot $\vec{K} = \vec{0} = \nabla \times \vec{K}$)

V's addieren sich, weil sich $\vec{K}$'s addieren:

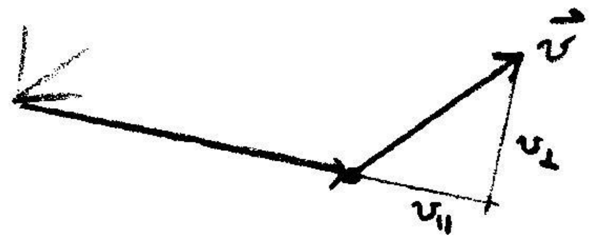
$$\vec{K} = -(\partial_x V, \dots, \dots)$$
$$\vec{F} = -(\partial_x W, \dots, \dots)$$
$$\vec{K}+\vec{F} = -(\partial_x (V+W), \dots, \dots)$$

Gesamtpotential eines T.-Systems $=$ Σ seiner V's.

v^2-Ablesen $\quad \frac{m}{2} v^2 = E - V$



effektives Potential



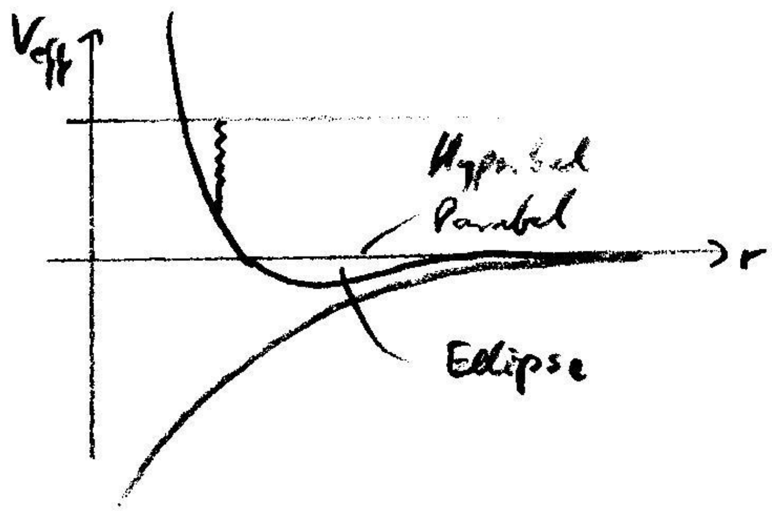
$$v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$$
$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\vec{r}\times\vec{v}_\perp$$
$$L = |\vec{L}| = m r v_\perp$$
$$\dot{r} = \partial_t \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \vec{e}_r \vec{v} = v_\parallel$$

(vgl. Skript S.16, Ende Kap. 2)

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) + V(r)$$

$$\boxed{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \text{mit } V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Bsp zu $V(r) = -\frac{\gamma m M}{r}$



Newton regiert die Welt: Kräfte bekannt, weiter per $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$

Zukunft liegt fest. (Laplace'scher Dämon)