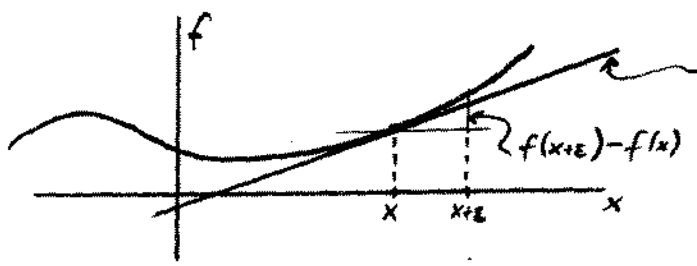
Ein (irgendwie durch den Raum eiernder) starrer Körper hat stets ein $\vec{\omega}$, denn 3 Punkte legen seine Position fest, und es ist

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\times(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} \qquad \text{wegen bac-cab.}$$

$$\Big(\Big(\ \overrightarrow{\text{Zähler}} \overset{!}{=} (\vec{v}_1-\vec{v}_3)\times\big(\vec{\omega}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\big) = \vec{\omega}\cdot\underbrace{\big((\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\big)}_{\overset{!}{=}\ \text{Nenner}} - (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\underbrace{\big((\vec{v}_1-\vec{v}_3)\cdot\vec{\omega}\big)}_{\overset{!}{=}\ 0}\ \Big)\Big)$$

<u>Differenzieren</u> (Ableitung bilden)

einfach. Sie können es schon: malen. Tangente, Anstieg.



$y = ax + b$

$a \overset{!}{=} \text{Anstieg} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Def. $\boxed{\text{Ableitung von } f(x) \text{ bei } x = f'(x) := \text{Anstieg der Kurve bei } x}$

per Rechnung: $\boxed{f'(x) \overset{!}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \qquad f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f(x)}$ „Differentialquotient"

„Limes" ≙ Grenzwert

vorstellen? Wie immer mit <u>Bsp</u> (bitte $\lim_{\varepsilon\to 0}$ hinzudenken)

(A) $\partial_x x^3 = \frac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\cancel{x^3} + 3x^2\varepsilon + \underbrace{3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3}_{\overset{!}{=}\ \mathcal{O}(\varepsilon^2)} - \cancel{x^3}\Big) = 3x^2$

nützliche Notation: $\mathcal{O}(\eta) :=$ etwas $\sim \eta$ bei $\eta \to 0$ gegen Null gehendes

(B) $\partial_x \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \frac{\cancel{x}+\varepsilon-\cancel{x}}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(C) $\partial_x \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{x+\varepsilon} - \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{x-(x+\varepsilon)}{(x+\varepsilon)x} = -\frac{1}{x^2}$

(D) $$\partial_x x^{n/m} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\underbrace{(x+\varepsilon)^{n/m}}_{=:\, x^{n/m}+a\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} - x^{n/m}\Big)$$

$$(x+\varepsilon)^n = \left(x^{n/m}+a\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)^m,$$

$$x^n + n x^{n-1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = x^n + m x^{\frac{n}{m}(m-1)}a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

$$= a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

bisher: $n, m = 1, 2, 3, \ldots$; genauso für $n = -1, -2, \ldots$

kann jede reelle Zahl λ bel. genau durch $\frac{n}{m}$ approximieren

$\Rightarrow$ allgemein $\partial_x x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}$

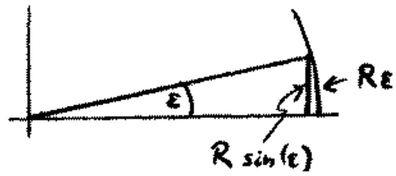
(E) $$\partial_x \sin(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)\right)$$

s. Kapitel Skript S.9

$$= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\sin(x)\underbrace{\cos(\varepsilon)}_{\overset{(**)}{=}\,1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \cos(x)\underbrace{\sin(\varepsilon)}_{\overset{(*)}{=}\,\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^3)} - \sin(x)\Big)$$

$$= \cos(x)$$

(*)



(**) $$\cos(\varepsilon) = \sqrt{1-\sin^2(\varepsilon)}$$

$$\rightarrow \sqrt{1-\varepsilon^2+\ldots} = 1-c\varepsilon^2+\ldots$$

quadr.: $1-\varepsilon^2+\ldots = 1-2c\varepsilon^2+\ldots$

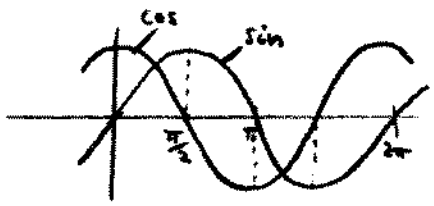
$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

(F) $$\partial_x \cos(x) = \partial_x \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) = -\partial_x \sin\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) = -\sin(x)$$

(***) $$\sin(x) = \cos\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\cos(x) = -\sin\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)$$



(G) $\partial_x\, g\cdot h = g'h + h'g$ "Produktregel"

(H) $\partial_x f(g(x)) = f'(g)\cdot g'$ "Kettenregel"

(I) $\partial_x f(g,h) = f'^{g} g' + f'^{h} h'$

aus (I) folgen (H) und (G). (I)-Herleitung genügt:

$$\partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}\Big[f\big(\underbrace{g(x+\varepsilon)}_{=\,g(x)+\varepsilon g'(x)}, h(x+\varepsilon)\big) - f\big(g(x), h(x)\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\Big[f(g+\varepsilon g', h+\varepsilon h') - f(g, h+\varepsilon h') + f(g, h+\varepsilon h') - f(g,h)\Big]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\Big[\varepsilon g'\cdot f'^{g}(g, h+\varepsilon h') + \varepsilon h' f'^{h}(g,h)\Big] = (\mathrm{I})$$

Bsp (I) gilt natürlich entsprechend auch für 3 Funktionen.

schöne Anwendung: "Gradient"

Maikäfer fliegt mit $\vec r(t)$ durch Abendluft mit Temp. $T(\vec r)$

Welche Temp.-Änderung pro Zeit hat er auszuhalten?

$$\partial_t T\big(x(t),y(t),z(t)\big) = \dot x\,\partial_x T + \dot y\,\partial_y T + \dot z\,\partial_z T \qquad (\partial_t z =: \dot z)$$

← sieht aus wie Skalarprod.

$$= \dot{\vec r}\cdot\underbrace{(\partial_x T,\ \partial_y T,\ \partial_z T)}_{=(\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z)\,T\ =:\ \mathrm{grad}\,T\ =:\ \vec\nabla T}$$

$$= \dot{\vec r}\cdot\vec\nabla T \quad , \quad \vec\nabla = (\partial_x,\partial_y,\partial_z)$$

differenzieren einer Vektorfunktion?

simpel: $\partial_t\,\vec a(t) := \frac{d\vec a}{dt} = (\dot a_1,\dot a_2,\dot a_3)$

((wie bei $\vec v = \dot{\vec r} = (\dot x,\dot y,\dot z)$))

übrigens ist $\overrightarrow{\text{Beschleunigung}} := \partial_t\,\vec v(t) = (\ddot x,\ddot y,\ddot z)$

Gefahr: $|\dot{\vec r}| = v \neq \dot r = \partial_t|\vec r|$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\dot r = \frac{1}{2\sqrt{\dots}}(2x\dot x+2y\dot y+2z\dot z) = \frac{1}{\sqrt{\dots}}\,\vec r\cdot\dot{\vec r} = \frac{\vec r}{r}\cdot\vec v = \vec e_r\cdot\vec v = v_\parallel \neq v$$

((z.B. Kreisbewegung von S.12: $|\dot{\vec r}| = R\omega$, $\dot r = 0$))

Rechenregeln (mit (I) leicht zu verstehen)

$$\partial_t \begin{cases} \vec a+\vec b \\ \lambda\vec a \\ \vec a\,\vec b \\ \vec a\times\vec b \end{cases} = \begin{cases} \dot{\vec a}+\dot{\vec b} \\ \dot\lambda\vec a+\lambda\dot{\vec a} \\ \dot{\vec a}\,\vec b+\vec a\,\dot{\vec b} \\ \dot{\vec a}\times\vec b+\vec a\times\dot{\vec b} \end{cases}$$

Linearer Operator

Op Element = anderes Element ; $\lambda\,\nearrow = \nearrow$; $\vec a\times \rightarrow\ = \rightarrow$; $\partial_x f = f'(x)$

A ist ein linearer Op. $\Leftrightarrow$ $A(\alpha f+\beta g) = \alpha Af + \beta Ag$

$Af := \frac{1}{f}$ ist <u>nicht</u> lin., denn $\frac{1}{\alpha f+\beta g} \neq \alpha\frac{1}{f}+\beta\frac{1}{g}$

$A^2 := AA$, $\partial_x^3 f = f'''$, etc.

3. Newton 1643–1727

bisher: Kap 1, Vektoren, Vokabeln geübt, statisches Weltbild ("Photo")
Kap 2, Kinematik, $\vec{r}(t)$ auf vorgegebenen Kurven, "Kino"

in der Natur: $\vec{r}(t)$ weiß von alleine, wie er sich zu verändern hat!
→ Zukunft vorhersagen? Wahrsagen? Physik!

Physik: Stück Natur verstehen = kann ausrechnen, was sie tun wird.
↪ wir sind gut vorbereitet: $\vec{r}(t)$, ∂_t, ...

$$\boxed{\text{Experiment(e)}} \rightarrow \left.\begin{array}{c}\text{Prinzipien der Natur – Mathematik}\\ \downarrow \\ \text{Vorhersage aller Experimente}\end{array}\right\} \text{Theor. Physik}$$

in diesem Kap.: Newton'sche Mechanik eines Massenpunktes

Es gibt Teilchen. T. wechselwirken

(stark,	em,	schwach,	Gravi
10^{-15} m,	$\sim r^{-2}$,	10^{-18} m,	$\sim r^{-2}$
1,	$1/137$,	10^{-5},	10^{-40}
klumpend,	wichtig,	kurzreichweitig,	aber Erde aus 10^{50} T.)

Die Wechselwirkung zw. 2 T. hängt von
Eigenschaftspaaren (m, q, color, ...) ab

Schlechte Apparate sehen T.-Klumpen als "Massenpkte"

Ww. zw. Massenpkten = Σ (elementare Ww.)

Für die Mechanik besteht die Welt aus Massenpunkten (k),
welche man numerieren kann (k),
und sie behandelt deren Bewegung zu gegebenen Kräften
(ist darum nur "halbe" Theorie).