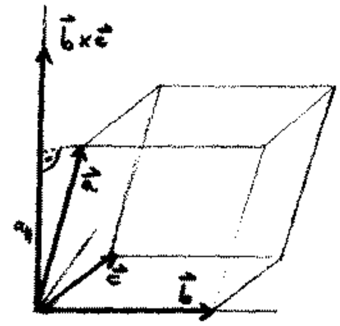
noch ein doppeltes Produkt (neben $\vec a \times (\vec b \times \vec c)$):

## Spatprodukt




$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = a_\parallel \, |\vec b \times \vec c|$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Volumen des Parallelepipeds} \\ \text{mit Kanten } a, b, c \end{pmatrix} \cdot \frac{a_\parallel}{|a_\parallel|}$$

$$= (\vec a \times \vec b) \cdot \vec c = (\vec c \times \vec a) \cdot \vec b$$

in Komponenten
$$= a_1 \cdot b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 \cdot b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 \cdot b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$(= \varepsilon_{ijk} \, a_i b_j c_k)$$

ordnet 9 Zahlen eine einzige Zahl zu

$\hat{=}$ "Determinante"

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Sarrus' Regel
(nur 3x3 und 2x2)

"Matrix"; s. Kap. 4

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{jk})$$

## Vektorgleichungen

schränken $\vec r$'s so ein, daß Lsn geometr. Objekt bilden ...

Bsp. $\vec r \cdot \vec e_3 = 0$. hat ($\infty$ viele) Lsn: $\vec r = (x, y, 0)$

$\Rightarrow$ ist Gleichung der $xy$-Ebene

$\vec r \cdot \vec e = 0$. Ebene durch Ursprung $\perp \vec e$

$|\vec r| = R$. Kugel mit Radius $R$

$|\vec r - \vec r_0| = R$. 〃, Mitte bei $\vec r_0$

↪ Translation: Ursprung-bezogene ($\vec r$'s enthaltende) Physik wird $\vec r_0$-bezogen durch $\vec r \to \vec r - \vec r_0$

weiteres Bsp zur Translation: Grav.-Kraft


$$\vec K = -\frac{\gamma m M}{r^2}\,\vec e_r$$

$\Rightarrow$ Stern (M) bei $\vec r_0$ hat $\vec K = -\dfrac{\gamma m M}{(\vec r-\vec r_0)^2}\,\dfrac{\vec r-\vec r_0}{|\vec r-\vec r_0|}$

**LK** (Linearkombination)

$c_1$ Objekt$_1$ + $c_2$ Objekt$_2$ + .. ist LK aus Obj.

$\vec a = a_1\vec e_1 + \dots + a_3\vec e_3$ ist LK aus $\vec e$'s

linear in = hoch eins von

$c_1\vec a + c_2\vec b + c_3\vec c$ ist LK aus $\vec a,\vec b,\vec c$

**VONS** (vollst. Orthonormalsystem)

| |
|---|
| 3 Vektoren $\vec f_j$ bilden VONS (Dreibein) |
| $\Leftrightarrow$ $\vec f_j\cdot\vec f_k = \delta_{jk}$ und $\vec f_1\cdot(\vec f_2\times\vec f_3) = +1$ |

↳ d.h. Rechtssystem.

"vollständig", weil jeder Vektor nach $\vec f_j$ entwickelbar:

$$\vec a = a_1'\vec f_1 + a_2'\vec f_2 + a_3'\vec f_3$$

$\vec a$ bekannt, erhalte $a_1' = \vec f_1\cdot\vec a$ etc.

$\vec a,\vec b$ "linear unabhängig" $\Leftrightarrow$ aus $c_1\vec a + c_2\vec b = \vec 0$ folgt $c_1=c_2=0$

3 linear unabh. V. spannen den 3D V.raum auf.

— Ende Kap. 1 —

Vokabeln

haben Sprache gelernt (Vektoren, Operatoren)

bisher alles statisch (unbewegt)

$\Rightarrow$ jetzt kommt Schwung in die Physik: Kap. 2

# 2. Kinematik

Kino, Bilderfolge, bewegte Pfeile

$\vec{a}(t) = \left(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\right)$ = Vektorfunktion

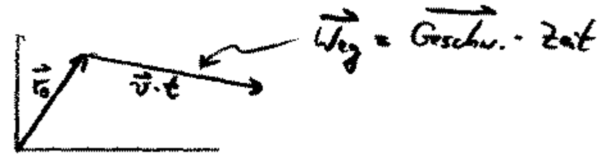
↑ Zeit $t$, z.B. $\vec{r}(t)$, $\vec{K}(t)$, $\vec{v}(t)$

(( Funktionen: Kap. 5. hier nur einfache, $x$, $x^2$, $\frac{x}{1+x^2}$, $\cos(x)$, $\sin(x)$ ))

Raumkurven kennenlernen über Bsp.

(A) Bewegung mit $\vec{v} = \overrightarrow{\text{const}_t}$.

$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ bekannt.



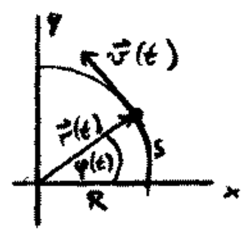

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$
$$= (x_0 + v_1 t,\ y_0 + v_2 t,\ \dots)$$
$$\vec{v} = (\ v_1,\ v_2,\ v_3\ )$$

Parameterdarstellung einer Geraden.

Parameter $t$ läuft von $-\infty$ nach $\infty$

(B) Kreisbewegung mit $v = \text{const}_t$ in $xy$ Ebene

ab $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$




"Kreisfrequenz"

$$s(t) = vt$$
$$\varphi(t) = s(t)/R = \frac{v}{R}t =: \omega t$$
$$\left(\omega = \frac{v}{R},\quad [\omega] = 1/\text{Zeit}\right)$$

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0\right)$$

Umlaufzeit = Periode = $T$

zu $t = T$ wird $\varphi = 2\pi = \omega T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

(( Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$. "Frequenz" $= \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ bei uns selten ))

$\vec{v}(t)$ rein geometrisch: kenne $v$, suche $\vec{e}_v$

$$\vec{v}(t) = v\vec{e}_v = v\cdot\left(\vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}(t)}{R}\right) = v\,(0,0,1)\times(c,s,0)$$
$$= R\omega\left(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0\right)$$

(C) Schraubenlinie $\quad \vec r(t) = \big(R\cos(\omega t),\ R\sin(\omega t),\ v_3 t\big)$

(D) Holzschraube $\quad \vec r(t) = \big(R(t)\cos(\omega t),\ R(t)\sin(\omega t),\ v_3 t\big)$

 $\Big\}\ v_3 t_0$ $\quad$ mit $R(t) = R\left(1 - t/t_0\right)$

$0 < t < t_0$

(E) Ellipse  $\quad \vec r(t) = \big(a\cos(\omega t),\ b\sin(\omega t),\ 0\big)$

(F) , $\omega t =: \tau$ $\quad \vec r = \big(2R\cos(\tau),\ R\sin(\underline{\underline{2}}\tau),\ 0\big)$

(G) spielen; e.g. 

<u>Winkelgeschwindigkeit</u>

Kreis (s. (B) oben) $\quad \vec v_{Kreis} = R\omega\,(\vec e_3 \times \vec e_r) = \underbrace{(\omega \vec e_3)}_{=:\,\vec\omega} \times \vec r$

$\varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$

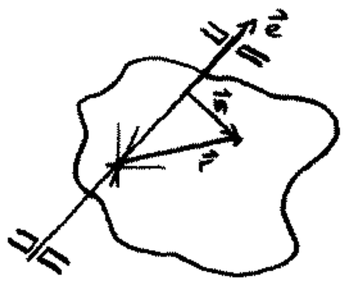
cave $\omega \neq w$ (omega / w)

allgemein (es muß nur eine momentane Achse $\vec e$ geben)

$\vec\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec e(t)$

(( Erde, , $\omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$, wohin zeigt $\vec\omega$? ))

starrer Körper (z.B. gelagert), Ursprung auf Achse,
$\vec v = ?$ eines Punktes bei $\vec r$:



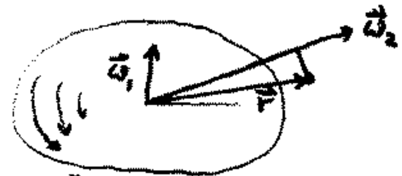
$\vec v = v\cdot\left(\vec e \times \frac{\vec r_\perp}{r_\perp}\right) = \underbrace{\frac{v}{r_\perp}}_{\omega}\,(\vec e \times \vec r_\perp)$

$\boxed{\vec v = \vec\omega \times \vec r}$

Ist $\vec\omega$ Vektor? ($\to$ Kap. 1: <u>endl.</u> Drehungen <u>nicht</u>!)

$\lambda\cdot\vec\omega$: kein Problem

$\vec\omega_1 + \vec\omega_2 \overset{?}{=} \vec\omega_{ges.}$ (bei Achsen-Kreuzung im Ursprung) JA:



"Karussell"

ohne Motor : $\vec u = \vec\omega_1 \times \vec r$

ohne Kar. : $\vec v = \vec\omega_2 \times \vec r$

$\vec u + \vec v = (\vec\omega_1 + \vec\omega_2) \times \vec r$

$\vec w = \vec\omega_{ges.} \times \vec r \quad \forall \vec r$ "für alle"