

Vektoren $\vec{a}$. ($= \vec{a}$)

bisher: $|\vec{a}|$, $c\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$

heute: weitere Verknüpfungen von 2 Vektoren

$\hookrightarrow \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \circ \vec{b}$, $\nabla \cdot \vec{b}$

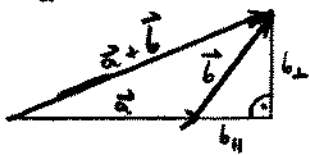
Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Motivation

(M1) $\frac{d}{dt} |\vec{a} + \vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)

definiert die
rechte Seite
der Gleichung

$\frac{d}{dt} |\vec{a} + \vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 2 \cdot \text{Rest} =: 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$



haben $\vec{b}$ zusammengesetzt

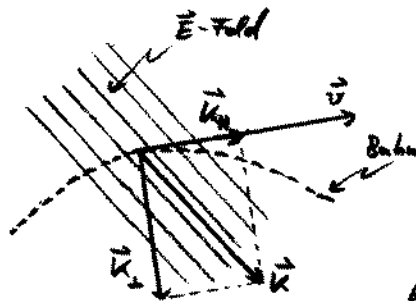
$\vec{b} = \vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel$

parallel zu $\vec{a}$

"Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ "

also: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} [\underbrace{(\vec{a} + \vec{b}_\parallel)^2}_{\text{Pythagoras}} + b_\perp^2 - a^2 - b_\perp^2 - b_\parallel^2] = a b_\parallel$

(M2)



geladenes Teilchen (Ladung q)
im elektrischen Feld $\vec{E}$.

$\vec{K} = q \vec{E}$

$\vec{K} = \vec{K}_\perp + \vec{K}_\parallel$ parallel zu $\vec{v}$;
beschleunigt

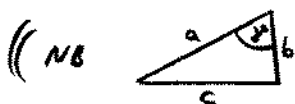
krümmt Bahn

also macht auch hier eine Definition $K_\parallel =: \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{K}$ Sinn.

Definition

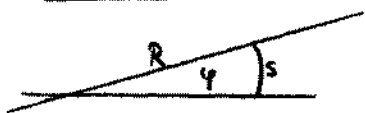
$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} := a b_\parallel = a_\parallel b = a b \cos(\varphi)}$

$\hookrightarrow$ Gleichberechtigung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\rightarrow$ Definiert $\cos(\varphi)$



"Kosinussatz" $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi)$

folgt aus Vektorrechnung: $= (\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$))

Winkel?

Maß der "Öffnung" zweier Geraden
 offensichtlich ist R proportional zu s .

Definition

$$\boxed{\text{Winkel } \varphi := \frac{s}{R}} \quad (\text{dimensionslos: } \frac{\text{Länge}}{\text{Länge}})$$

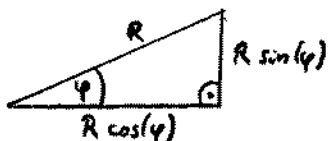
rechter Winkel? 90° ? $\pi/2$!

nachmessen: , $\frac{s}{R} = 3.14159... =: \pi$

Raumwinkel?

Maß für "Öffnung" eines Kegels, mit Stück Kugeloberfläche S
 als Abschluss. $2 \cdot R \rightarrow 4 \cdot S$, also:

$$\text{Def } \boxed{\text{Raumwinkel } \Omega := \frac{S}{R^2}} \quad (\text{dimensionslos})$$

Sinus? Kosinus?

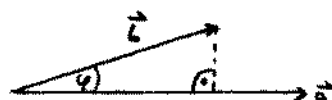
$$\cos(\varphi) := \frac{\text{Kantenlänge am Winkel } \varphi}{R}$$

$$\sin(\varphi) := \frac{\text{Kantenlänge gegenüber } \varphi}{R}$$

$$\Rightarrow \text{Pythagoras: } \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

verstehen jetzt auch das letzte Gleichheitszeichen

der Skalarprodukt-Def:



$$b_{\parallel} = b \cos(\varphi)$$

Formelsammlung zum Skalarprodukt

$$\vec{a}^2 := \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2, \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}^2}, \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

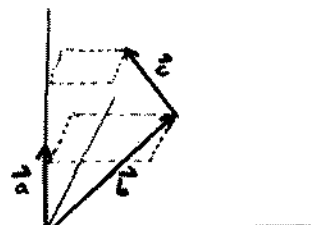
$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab \quad (\text{Schwarz'sche Ungleichung})$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

$$(*) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$r_{12} = r_{21} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}$$



alles anschaulich klar; z.B. Skizze $\rightarrow$

liefert $(\vec{b} + \vec{c})_{\parallel} = b_{\parallel} + c_{\parallel}$. Multipliziere mit a $\xrightarrow{\text{es folgt}} (*)$

Vereinbarung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$

brauche manchmal Klammern: $\vec{a}(\vec{b} \vec{c}) \neq (\vec{a} \vec{b}) \vec{c}$!

nur durch einen Vektor teilen. ~~"~~ nicht def.

in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl, $\vec{\text{Vektor}} = \vec{\text{Vektor}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ in Komponenten

brauchen Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0) ; \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0) ; \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\text{dann ist } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$\text{und } \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3)$$

$$= a_1 b_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 b_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + a_3 b_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 \\ + a_1 b_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 b_2 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 \\ + a_1 b_3 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + a_2 b_3 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + a_3 b_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Einstein'sche Summenkonvention

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^3 a_j b_j =: a_j b_j$$

falls zwei gleiche Indizes vorkommen $\rightarrow$ summieren

$$\text{obige Herleitung nun kurz: } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_j \vec{e}_j \cdot b_k \vec{e}_k = a_j b_k \delta_{jk} = a_j b_j$$

$$\text{mit Kronecker-Symbol } \delta_{jk} := \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anwendungs-Beispiele:

$$a_j a_j = a^2$$

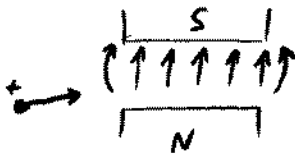
$$c_k a_j a_l b_k \delta_{jl} = a^2 (\vec{c} \cdot \vec{b})$$

$$\delta_{jl} \delta_{lk} = \delta_{jk} , \quad \delta_{jl} \delta_{lm} \delta_{mn} \delta_{nk} = \delta_{jk}$$

$$\delta_{ii} = 3 , \quad \delta_{jl} \delta_{li} \delta_{mn} \delta_{ni} = 9$$

Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

Motivation

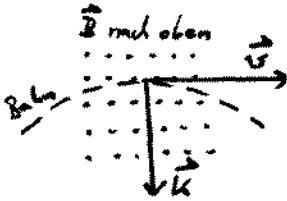


el. geladenes Teilchen (Ladung q)

fliegt durch Magnetfeld $\vec{B}$

Experiment $\Rightarrow \vec{K} \perp \vec{v}, \vec{K} \perp \vec{B}$

und $\vec{K}$ proportional q und $v B_{\perp} = v_{\perp} B$ Komp. senkrecht zu $\vec{v}$



$\Rightarrow$ erfinde "Kreuzprodukt"

mit den genannten Eigenschaften

$$\vec{K} =: q (\vec{v} \times \vec{B})$$

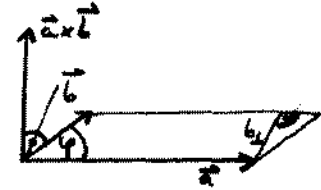
(Anwendung? DESY, CERN, ... !)

Definition

$$\vec{a} \times \vec{b} := \left(\begin{array}{l} \text{Fläche des von} \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ aufgespannten} \\ \text{Parallelogramms} \end{array} \right) \cdot \vec{e} = -\vec{b} \times \vec{a} = \vec{e} a b \sin(\varphi)$$

wobei $\vec{e}$ Einheitsvektor $\perp \vec{a}$ und $\perp \vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ bilden ein Rechtssystem



Formelsammlung zum Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp} = \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = a b_{\perp} = a_{\perp} b$$

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

alles anschaulich klar; s. Ü.

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})}$$

(kommt sehr häufig vor)

(Beweis s. Ü.)

Zerlegung - $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$ oft nützlich

muß angeben, in Bezug auf welchen Vektor $\parallel$ und $\perp$ gilt:

z.B. in Bezug auf Einheitsvektor $\vec{e}$

$$\Rightarrow \vec{a}_\parallel = (\vec{a} \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a}(\vec{e} \cdot \vec{e}) - \vec{e}(\vec{a} \cdot \vec{e}) \stackrel{\text{BAC-CAB}}{=} \vec{e} \times (\vec{a} \times \vec{e})$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ in Komponenten

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2; \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0 \text{ etc.}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

Indizes: j-te Komponente ergibt sich durch $\cdot \vec{e}_j$ auf beiden Seiten

$$(\vec{a} \times \vec{b})_j = a_k b_l \vec{e}_j \cdot (\vec{e}_k \times \vec{e}_l) =: \varepsilon_{jkl} a_k b_l$$

$$\text{mit } \varepsilon_{jkl} := \vec{e}_j \cdot (\vec{e}_k \times \vec{e}_l) = \begin{cases} 0 & \text{wenn 2 Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{wenn } j, k, l \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } j, k, l \text{ antizyklisch} \end{cases}$$

↖ "total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe"

((zyklisch: 1,2,3; 2,3,1; 3,1,2

anti: 1,3,2; 2,1,3; 3,2,1))

Trigonometrie?

Sinussatz, Kosinussatz etc

sind einfache Folgerungen der Vektorrechnung. (s. S. 5)

Weiteres Bsp:



$$\text{Fläche großes Rechteck} = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin(\alpha + \beta)$$

↖

= linkes + rechtes Rechteck

$$= b \sin(\beta) a \cos(\alpha)$$

$$+ a \sin(\alpha) b \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$