Einführung in die Physik I (für Nicht-PhysikerInnen)

Präsenzübungen Woche 5

05 - 09 November 2018

1. Bei elastischen Stößen bleibt sowohl die kinetische Energie als auch der Impuls erhalten. Die erste Masse m_1 hat eine Anfangsgeschwindigkeit $v_{1,A}$ und die zweite Masse m_2 befinde sich in Ruhe ($v_{2,A} = 0$). Zeigen Sie dass für einen elastischen Stoß zwischen zwei Massen m_1 und m_2 sich die Endgeschwindigkeiten ergeben zu:

$$v_{1,E} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,A}$$

und

$$v_{2,E} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,A}.$$

Lösung: Die Gleichungen für die Erhaltung der kinetische Energie und des Impulses sind:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,E}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,E}^2 \quad (1)$$

$$m_1 v_{1,A} = m_1 v_{1,E} + m_2 v_{2,E}. \quad (2)$$

Aus der Gleichung 2 erhalten wir;

$$v_{1,E} = \frac{m_1 v_{1,A} - m_2 v_{2,E}}{m_1} = v_{1,A} - \frac{m_2}{m_1} v_{2,E}. \quad (3)$$

Dieses können wir nun in die Gleichung 1 einsetzen. Zusammengesetzt ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} m_2 v_{2,E}^2 &= m_1 \left(v_{1,A}^2 - v_{1,A}^2 - \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2,E}^2 + 2 \frac{m_2}{m_1} v_{1,A} v_{2,E} \right) \\ v_{2,E} &= \frac{m_1}{m_2} \left(-\frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2,E}^2 + 2 \frac{m_2}{m_1} v_{1,A} \right) \\ v_{2,E} &= -\frac{m_2}{m_1} v_{2,E} + 2v_{1,A} \\ v_{2,E} \frac{m_1 + m_2}{m_1} &= 2v_{1,A} \\ v_{2,E} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,A}, \end{aligned}$$

was eine Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt. Setzen wir dieses Ergebnis jetzt in die Gleichung 3 ein, bekommen wir:

$$\begin{aligned} v_{1,E} &= v_{1,A} - \frac{m_2}{m_1} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,A} \\ v_{1,E} &= v_{1,A} \frac{m_1 + m_2 - 2m_2}{m_1 + m_2} \\ v_{1,E} &= v_{1,A} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Womit die andere Bedingung auch erfüllt wird.

2. Zwei Studierende, Jan (85 kg) und Jana (60 kg) fahren in einem Ruderboot (50 kg) auf einem stillen See. Jan sitzt in der Nähe des Bugs und Jana sitzt 2,0 m von ihm entfernt im Heck. Nach einer Weile wechseln die beiden ihre Plätze. Wir vernachlässigen alle externe horizontale Kräfte (d.h. die Kräfte die durch das Wasser ausgeübt werden) und nehmen an, dass das Boot in Ruhe war. Wie weit bewegt sich dann das Boot beim Platzwechsel?

Lösung: Weil keine externen Kräfte und keine Anfangsgeschwindigkeiten wirken, sollte der Massenmittelpunkt von den Studierenden plus Boot konstant bleiben. Die horizontale Position des Massenmittelpunkts vor dem Platzwechsel (mit Bezug zu dem hinteren Sitzplatz) können wir wie folgend berechnen:

$$\begin{aligned}m_{\text{Tot}} \cdot x_{\text{S}} &= m_{\text{Jan}} \cdot 2,0 \text{ m} + m_{\text{Jana}} \cdot 0 \text{ m} + m_{\text{Boot}} \cdot x_{\text{Boot,A}} \\195 \text{ kg} \cdot x_{\text{S}} &= 85 \text{ kg} \cdot 2,0 \text{ m} + 60 \text{ kg} \cdot 0 \text{ m} + 50 \text{ kg} \cdot x_{\text{Boot,A}} \\195 \text{ kg} \cdot x_{\text{S}} &= 170 \text{ kgm} + 50 \text{ kg} \cdot x_{\text{Boot,A}}.\end{aligned}$$

Nach dem Platzwechsel – und unter der Annahme, dass das Boot sich einen Abstand d nach Vorne bewegt – erhalten wir:

$$\begin{aligned}195 \text{ kg} \cdot x_{\text{S}} &= m_{\text{Jan}} \cdot d + m_{\text{Jana}} \cdot (d + 2,0 \text{ m}) + m_{\text{Boot}} \cdot (d + x_{\text{Boot,A}}) \\&= d \cdot (85 \text{ kg} + 60 \text{ kg} + 50 \text{ kg}) + 120 \text{ kgm} + 50 \text{ kg} \cdot x_{\text{Boot,A}} \\&= 195 \text{ kg} \cdot d + 120 \text{ kgm} + 50 \text{ kg} \cdot x_{\text{Boot,A}}.\end{aligned}$$

Weil die Position der Massenmittelpunkt konstant ist, können wir jetzt die zwei Gleichungen gleichsetzen:

$$170 \text{ kgm} + 50 \text{ kg} x_{\text{Boot,A}} = 195 \text{ kg} \cdot d + 120 \text{ kgm} + 50 \text{ kg} x_{\text{Boot,A}}.$$

Als Folge des Wechsels bewegt sich das Boot um:

$$\begin{aligned}d &= \frac{170 \text{ kgm} - 120 \text{ kgm}}{195 \text{ kg}} \\&= 0,2564 \text{ m}\end{aligned}$$

26 cm.