Einführungsblock (integrierter Vorkurs)

WS 2023/24 Übungsblatt 8

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/VK.html

Aufgabe 40

Zeigen Sie für beliebige $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$:

a) $\log_b(1) = 0$.

b) $\log_b(b) = 1$.

c) $\log_b(x\,y) = \log_b(x) + \log_b(y) \quad$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^+$.

d) $\log_b(x^y) = y \log_b(x) \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 41

Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion $x(t) := \frac{1+2t^3}{1+t^2}$.

Aufgabe 42

In dieser Aufgabe soll man *anschaulich* (d.h. *nicht* streng mathematisch) argumentieren.

a) $f'(x) > 0$ bedeutet, dass die Funktion $f(x)$ zumindest in der unmittelbaren Umgebung von x „ansteigt", und analog für $f'(x) < 0$.

b) Was folgt aus $f'(x) = 0$?

c*) Was kann man aus $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) = 0$ schließen ?

Aufgabe 43

Führen Sie für die Funktion $f(x) := x^3 - 2x^2 - x$ eine sog. *Kurvendiskussion* durch (d.h. erste und zweite Ableitungen berechnen; Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte bestimmen; Verhalten für $x \to \pm\infty$ untersuchen; Graph der Funktion skizzieren).

– bitte wenden –

Aufgabe 44*

a) Schreiben Sie a^x als Potenz von b.

b) Schreiben Sie $\log_a(x)$ mittels Logarithmen zur Basis b.

Aufgabe 45*

Zeigen Sie für beliebige $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$:

a) $b^{\log_b(x)} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. D.h. $\log_b(x)$ ist diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muss, um x zu erhalten.

b) $\log_b(b^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Gemäß a) und b) sind also $\log_b(x)$ und b^x zueinander inverse Funktionen.

Aufgabe 46*

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Überzeugen Sie sich davon, dass die Funktion $\exp(x)$ für grosse Werte von x schneller als die Funktion x^n anwächst.
Hinweis: Es ist kein mathematisch strenger Beweis gefragt, es reicht wenn Sie selber am Ende überzeugt sind.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Überzeugen Sie sich davon, dass die Funktion $\ln(x)$ für grosse Werte von x beliebig gross wird, dabei aber langsamer anwächst als die Funktion $\sqrt[n]{x}$.