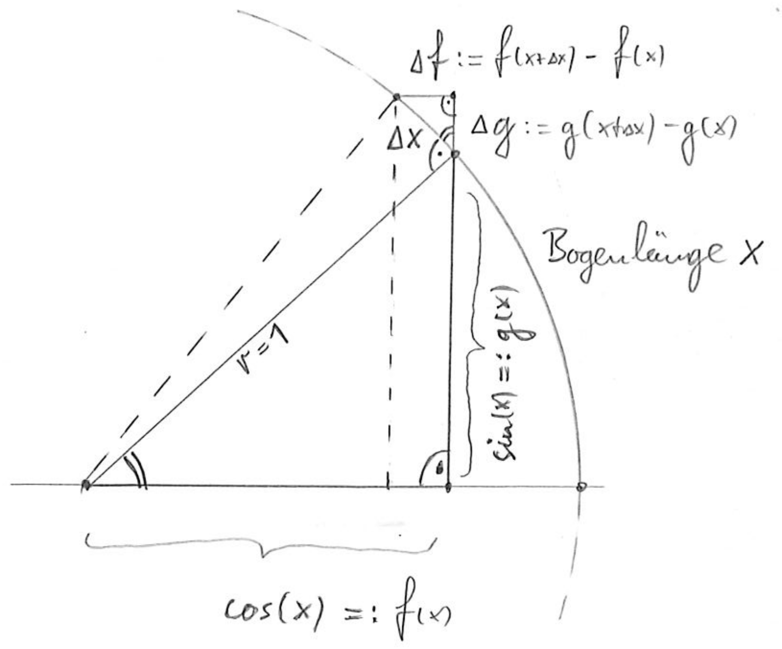
2.) Betrachte Einheitskreis:



- Gleicher Winkel $\measuredangle$ im grossen und kl. Dreieck wenn $\Delta x \to 0$.

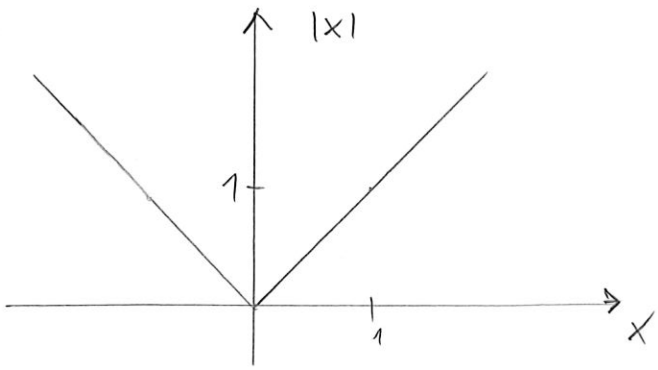
- Für $\Delta x \to 0$ wird $\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \cos(x)$

- Beachte: $\Delta f < 0 \Rightarrow \frac{-\Delta f}{\Delta x} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \sin(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \sin(x)} = \cos(x) \quad , \quad \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}_{\frac{d}{dx} \cos(x)} = -\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\sin'(x) = \cos(x)}} \quad , \quad \underline{\underline{\cos'(x) = -\sin(x)}}$$

3.) $\underline{f(x) := |x|}$



$x > 0$: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

siehe 1.)

$x < 0$: $f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$

$x = 0$: Keine eindeutige Tangente („Knick")

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ bei $x=0$ <u>nicht</u> diff'bar.

8.2 Ableitungsregeln

Betrachte zwei diff'bare Fkt'en $f(x)$ und $g(x)$.

Dann sind auch die Fkt'en $u(x) := f(x) + g(x)$, $v(x) := f(x) \cdot g(x)$

und $w(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(x) \neq 0$) diff'bar, und es gilt:

(i) $u'(x) = \underline{\underline{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}}$ (Summenregel)

(ii) $v'(x) = \underline{\underline{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}}$ (Produktregel)

(iii) $w'(x) = \underline{\underline{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}}}$ (Quotientenregel, $g(x) \neq 0$)

Strenger Bew: Analysis

Anschauliche Begründung: [„für Physiker"]

(i) $$u'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad u'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{(für alle } x \text{ wo } f'(x) \text{ und } g'(x) \text{ ex.)}$$

(ii) $$v'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + \overbrace{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)}^{=0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right)$$

Rest analog zu (i)

8.11

(iii) Zuerst:

$$\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} \qquad \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\to \frac{1}{(g(x_0))^2}} \underbrace{\left(-\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)}_{\to -g'(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Jetzt: $$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \left(f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g(x_0)}\right)\right)' \overset{\text{(ii)}}{=}$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)'}_{-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}}$$

$$= \frac{f'(x_0)g'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beisp:

1.) Oben: $(a+bx)' = b \Rightarrow x' \overset{a=0,\,b=1}{=} 1 \;,\; a' \overset{b=0}{=} 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(a\cdot f(x))'}} = \underbrace{a'}_{0}\cdot f(x) + a f'(x) = \underline{\underline{a f'(x)}}$$

2.) $$(x^2)' = (\underset{\underset{f}{\uparrow}}{x}\cdot\underset{\underset{g}{\uparrow}}{x})' \underset{\underset{(ii)}{\uparrow}}{=} x'\cdot x + x\cdot x' = 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x$$

$$(x^3)' = (\underset{\underset{f}{\uparrow}}{x^2}\cdot\underset{\underset{g}{\uparrow}}{x})' \overset{\downarrow}{=} \underbrace{(x^2)'}_{2x}\cdot x + x^2\cdot\underbrace{x'}_{1} = 3x^2$$

usw

$$\Rightarrow \underline{\underline{(x^n)' = n\,x^{n-1}}} \qquad \underline{\underline{\forall\, n\in\mathbb{N}}}$$

Dasselbe für alle $n\in\mathbb{Z}$: Übungen.

3.) $P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ($\underline{\text{Polynom}}$)

$$\Rightarrow P'(x) \underset{\underset{(i)}{\uparrow}}{=} \sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)' \underset{\underset{1.)}{\uparrow}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\, k\, x^{k-1}$$

$\nwarrow$ Kein Beitrag für $k=0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot k\cdot x^{k-1}}}$$

4.) $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, x^k$ (Potenzreihe)

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, k \, x^{k-1}$$ („man darf gliedweise differenzieren")

Strenger Bew: Analysis

Anschauliche Begründung: ist „unendliches Polynom", vgl. 2.)

Wichtigstes Beisp: $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\Rightarrow \quad \exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k!} \, k}_{\frac{k}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)\cdot k} = \frac{1}{(k-1)!}} \cdot x^{k-1} \overset{j:=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j = \exp(x)$$

$$\boxed{\exp'(x) = \exp(x)} \quad \forall \, x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^x)' = e^x \quad \forall \, x \in \mathbb{R}$$

8.3 Mittelbare Funktionen

Eine Fkt. $h(x)$ der Form

$$h(x) = f(g(x))$$

heisst mittelbare Fkt. ($\hat{=}$ Verkettung/Verknüpfung von f und g).

Andere Schreibweise: $h = f \circ g$ bzw $h(x) = (f \circ g)(x)$

Beisp:

- $f(x) := x^2$, $g(x) := a + bx \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 = (a+bx)^2$
- $f(x) := \sin x$, $g(x) := x^2 \Rightarrow f(g(x)) = \sin(x^2)$

  $g(f(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$
- $g(x) := f^{-1}(x) \Rightarrow f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

  $g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$
- $f(x) := e^x$, $g(x) := \cos x \Rightarrow f(g(x)) = e^{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\cos x)^k$