Def: Sei $b \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann heisst

$$b^x := \exp(x \cdot \ln b)$$

die x-te **Potenz** von b (b: Basis, x: Exponent)

Folgerungen:

1.) $b^0 = \exp(0) = 1 \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^+$

in Übereinstimmung mit früherer Def. $x^0 := 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2.) $b^1 = \exp(\ln b) = b$ (wie gewohnt)

3.) $e^x = \exp(x \underbrace{\ln e}_{=1}) \Rightarrow \boxed{\exp(x) = e^x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

4.) $\boxed{\ln(x^y) = y \ln x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$

Bew.: $\ln(\underbrace{x^y}_{\exp(y \ln x)}) = \ln(\exp(y \ln x)) = y \ln x$

5.) $\underline{\underline{b^x \cdot b^y = b^{(x+y)} =: b^{x+y}}}$ $\quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$

Bew: $b^x \cdot b^y = \exp(x \ln b) \cdot \exp(y \ln b) = \exp(x \ln b + y \ln b)$

$= \exp((x+y)\ln b) = b^{(x+y)}$.

Folgerung: $b^x \cdot b^{-x} = b^0 = 1 \iff \underline{\underline{b^{-x} = \frac{1}{b^x}}}$

6.) $\underline{\underline{(b^x)^y = b^{(x\cdot y)} =: b^{x\cdot y}}}$ $\quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$

Bew: $(b^x)^y = \exp(y \ln(\underset{\exp(x \ln b)}{\underset{\shortparallel}{b^x}})) = \exp(y\, \underbrace{\ln(\exp(x \ln b))}_{x \cdot \ln b})$

$= \exp(y \cdot x \cdot \ln b) = b^{(x\cdot y)}$

[Aber: im Allg. $b^{(x^y)} \neq (b^x)^y$!
$\quad$ „ungleich"]

7.) $\underline{\underline{(\exp(x))^y}} = (e^x)^y = e^{(x\cdot y)} = \underline{\underline{\exp(x\cdot y)}}$ $\quad$ (Gegenstück zu 4.)

8.) $\underline{\underline{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}}$ $\quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}$

Bew: $a^x \cdot b^x = \exp(x \ln a)\, \exp(x \ln b) = \exp(x \ln a + x \ln b)$

$$= \exp(x\, \underbrace{[\ln a + \ln b]}_{= \ln(a \cdot b)}) = \exp(x \cdot \ln(a \cdot b)) = (a \cdot b)^x$$

- All dies ist für $x = n \in \mathbb{N}$ in Übereinstimmung mit:

(i) $b^n := \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ Stück}}$, $b^{-n} := \frac{1}{b^n}$ (hier ist aber auch $b < 0$ erlaubt!)

(ii) $(b^{\frac{1}{n}})^n = b^{\frac{1}{n} \cdot n} = b^1 = b$, d.h. $\underline{\underline{\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}}}$ ist diejenige <u>positive</u> Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert b ergibt.

- 5.) + 6.) + 8.) heissen <u>„Potenzgesetze"</u>

Def.: Für ein beliebiges $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$ heisst die Fkt.

$$\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_b(x) := \frac{\ln x}{\ln b}$$

der Logarithmus zur Basis b

Speziell:

Andere Namen:

- $ld(x) := \log_{10}(x)$ (dekadischer Log.) — $\log(x)$, $\lg(x)$
- $lb(x) := \log_2(x)$ (binärer Log.) — $ld(x)$
- $\ln(x) := \log_e(x)$ (natürlicher Log.) — $\log(x)$

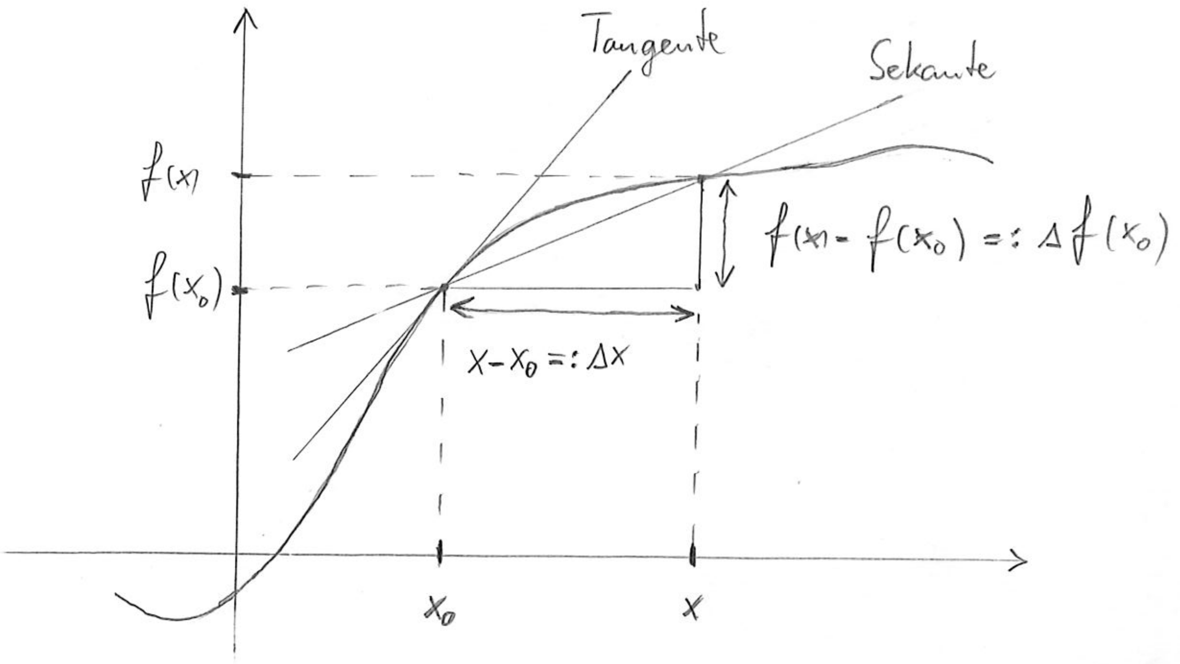
Mehr dazu: Übungen.

8 Differentialrechnung

[Ausführlich in Schule u. Analysis-Vorl. $\Rightarrow$ hier relativ kurz]

8.1 Die Ableitung

Betrachte eine Fkt. $f(x)$ in der Nähe eines „Referenzpunktes" x_0:



$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \;\hat{=}\; \underline{\text{Steigung der Sekante}} \quad (\text{„Differenzenquotient"})$$

geht für $x \to x_0$ bzw $\Delta x \to 0$ über in

[„df-nach-dx"]

$$\underline{\underline{\frac{df(x_0)}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \;\hat{=}\; \text{Steigung der Tangente}}} \quad (\text{„Differential-quotient"})$$

Voraussetzung: Limes existiert und unabh. davon, ob sich x „von oben" oder „von unten" an x_0 annähert (aber immer $x \neq x_0$)!

$\Leftrightarrow$ „ $f(x)$ ist <u>differenzierbar</u> an der Stelle x_0 ".

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ hat bei x_0 keinen „Knick" oder „Sprung".

Name: Ableitung (von $f(x)$ an der Stelle x_0).

Andere Schreibweisen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

[analog

von oben oder unten, aber immer $x \neq x_0$]

$$= \frac{d}{dx} f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$ [„f-Strich"]

Präzisere Def: Analysis.

<u>Beachte:</u> Falls $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ (d.h. für alle $x_0 \in \mathbb{R}$) oder einem Teilbereich davon differenzierbar, dann ist

<u>$f'(x)$ selbst wieder eine Fkt. von x.</u>

[Wie immer (vgl. S. 6.4): Name des Argumentes ändert nichts an den Eigenschaften der Fkt.]

Wie immer: Auch ganz andere Namen möglich, z.B.:

Fkt.:	Ableitung:
$f(t)$	$\frac{d}{dt}f(t) =: \dot{f}(t)$ ($f'(t)$ unüblich!) ↖ „f-Punkt"
$x(t)$ (z.B. "Ort")	$\dot{x}(t) =: v(t)$ (z.B. „Geschw.")

genauer: $\dot{x}(t) \hat{=}$ Momentangeschw.

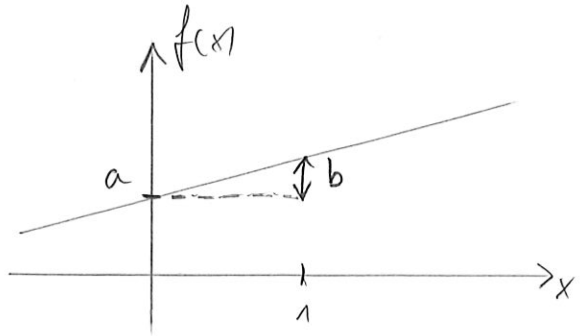
$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \hat{=}$ mittlere Geschw. [von t bis $t+\Delta t$]

$g(y)$	$g'(y) = \frac{d\,g(y)}{dy} = \frac{d}{dy}g(y)$ usw.
$w(q)$	$w'(q)$

usw.

Beisp:

1.) $f(x) := a + bx$



„Gerade mit Steigung b". [vgl. Kap. 3.4, S 3.15]

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = a + bx - (a + bx_0) = b(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b ,$$

d.h. $f(x)$ an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ diff'bar und

$f'(x_0) = b \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$

$f'(x) = b \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$