- $e^n = \exp(n) = \exp\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\right) = \exp\left(\frac{n}{2}\right)\cdot \exp\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\exp\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{e^n}}}$ $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, z.B. $\exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} = 1{,}64\ldots$

- Analog: $\underline{\underline{\exp\left(\frac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{e^n}}}$ $\forall\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}$

- $\underline{\text{Später}}$ werden wir zeigen : $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Kap. 7)

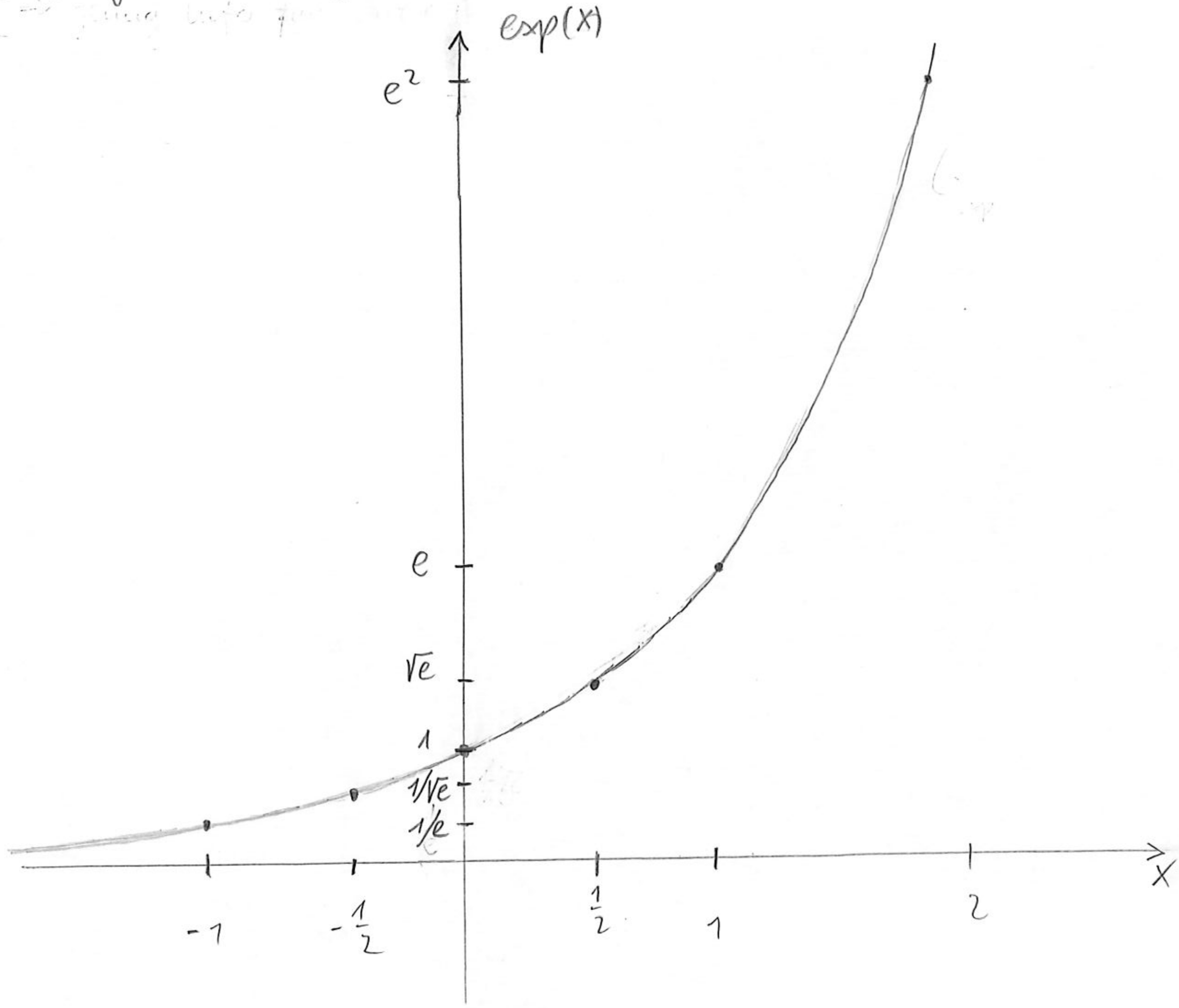
  [jetzt : e^x noch gar nicht definiert !]

- Für $x \geq 0$ offensichtlich : mit zunehmendem x

  nimmt auch x^k zu, und somit auch $\exp(x)$.

  Für $x \leq 0$ folgt dasselbe aus $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

[$\Rightarrow$ genug Info für Skizze]

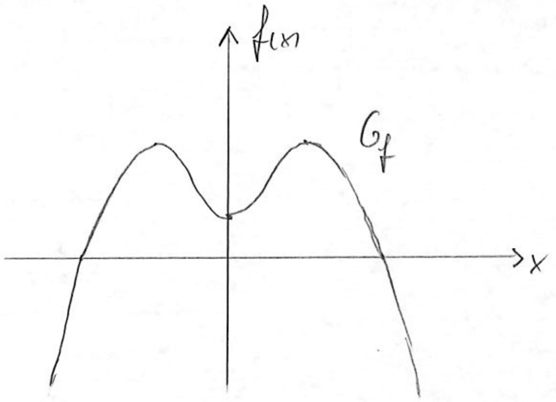


6 Funktionen (Teil 2)

6.1 Symmetrien

1.) $f(x)$ heisst <u>gerade</u> Fkt. $\Leftrightarrow$ $\underline{f(-x) = f(x)}$

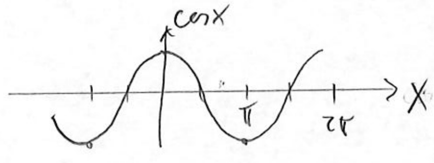
Beisp: 1.)



[könnte z.B. Polynom 4. Ordn. sein]

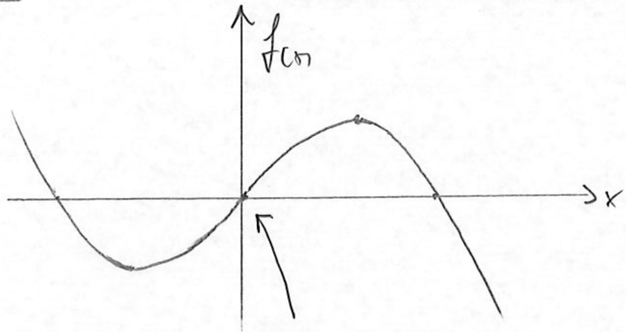
Symmetrie- bzw Spiegelgerade

2.) $f(x) = \cos(x)$



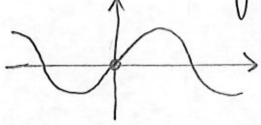
2.) $f(x)$ heisst <u>ungerade</u> Fkt. $\Leftrightarrow$ $\underline{f(-x) = -f(x)}$

Beisp.: 1.)



Symmetrie- bzw Spiegelungspkt.

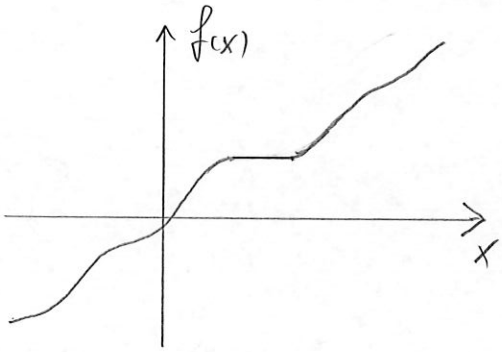
2.) $\sin(x)$



Weitere Beisp: Ü.

6.2 Monotonie

$f(x)$ heisst monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall\, x_1 < x_2$



und streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2) \quad \forall\, x_1 < x_2$

Wichtigstes Beisp: $\exp(x)$.

Analog: (streng) monoton fallend.

Beisp.: Ü.

6.3 Umkehrfunktionen

Sei $f: A \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend)

$\quad\;\;\hookrightarrow$ „Definitionsbereich"

$\forall\, x \in A \Rightarrow$ falls $x_1 \neq x_2$ dann $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Def: $f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \}$ „Wertebereich von f".

$\Rightarrow$ zu jedem $y \in f(A)$ „gehört" genau ein [$\hat{=}$ ein und nur ein] $x \in A$,

nämlich das x mit $f(x) = y$.

$\Leftrightarrow$ Zuordnung von x zu $f(x) = y$ ein-eindeutig,

d.h. umkehrbar $:\Leftrightarrow$

Umkehrfkt. $f^{-1}: f(A) \to A$

$$y \mapsto f^{-1}(y) =: \text{dasjenige } x \in A \text{ mit } f(x) = y$$

$\Leftrightarrow$ „Auflösen der Gl. $f(x) = y$ nach x" $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\underline{\underline{f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y}) = x}}}_{f^{-1}(y) = x} \qquad \forall x \in A$$

Ebenso:

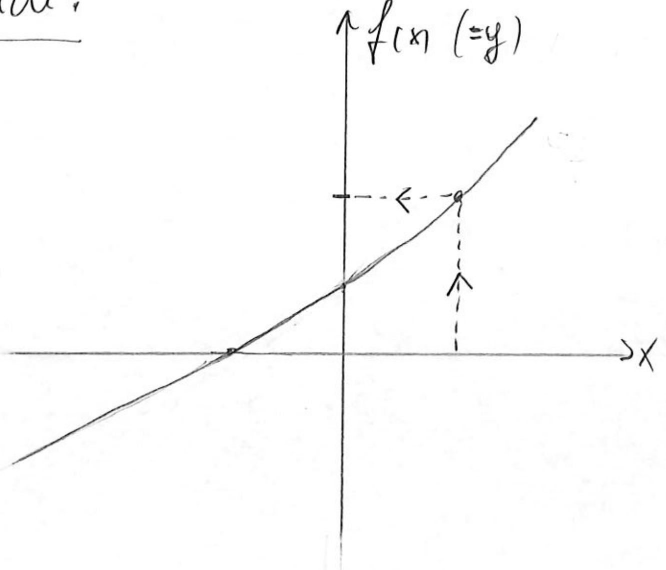
$$\underbrace{f(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x})}_{f(x) = y} = y \qquad \forall y \in f(A)$$

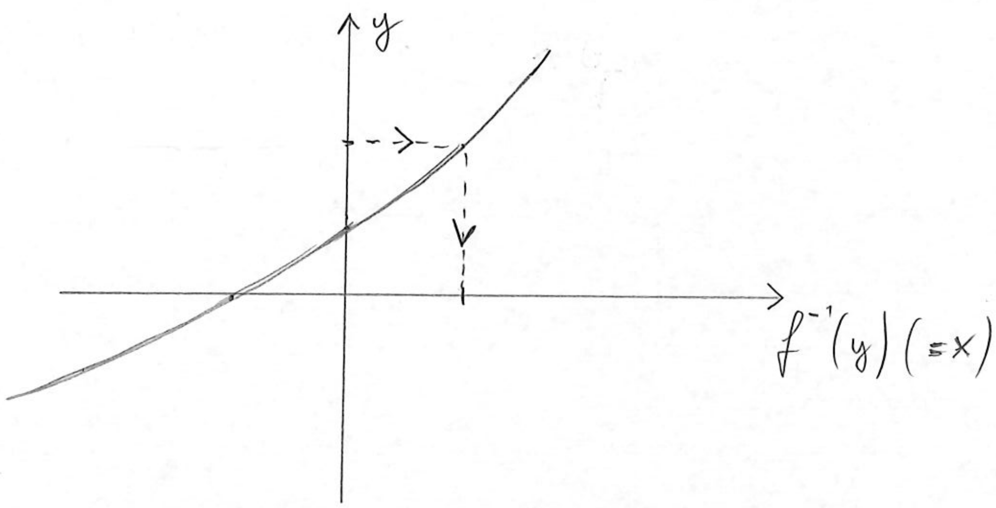
Äquivalent:

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{f(f^{-1}(x)) = x}} \qquad \forall x \in f(A)$$

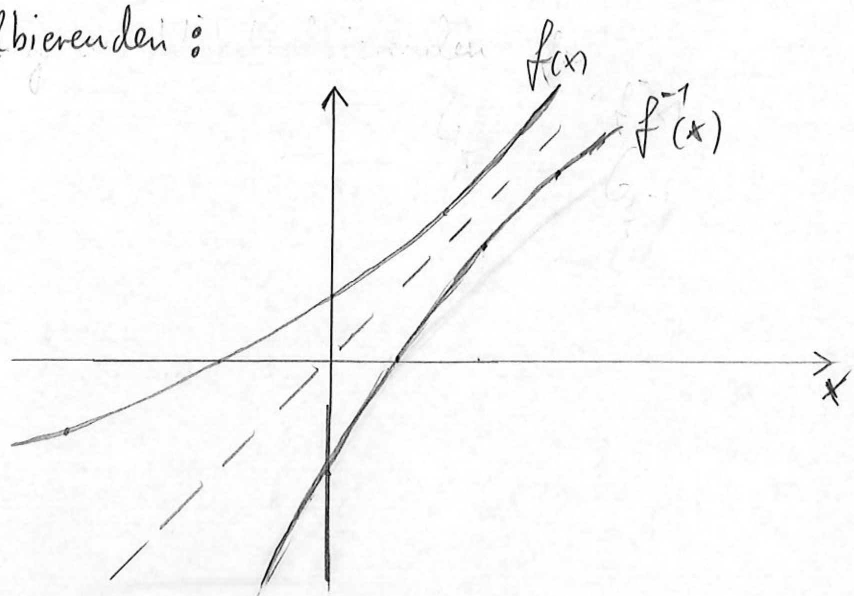
[der Name des Arguments ändert nichts an den Eigenschaften der Fkt.!]

Anschaulich:





Vertauschen von Abszisse (x-Achse) und Ordinate (y-Achse) $\Leftrightarrow$ Spiegelung an Winkelhalbierenden:



$\Rightarrow$ $f^{-1}(x)$ wieder streng monoton wachsend (oder fallend).

Beisp:

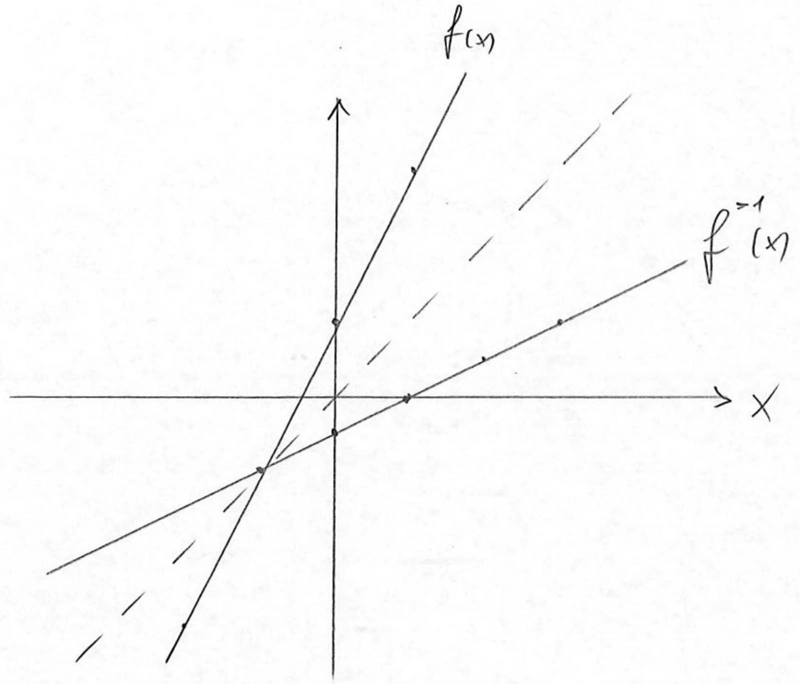
1.) $\underline{\underline{f(x) = 1 + 2x}} = y \overset{\text{„Auflösen nach x"}}{\Leftrightarrow} 2x = y - 1$

$\Leftrightarrow$ $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y = f^{-1}(y)$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x}}$

Probe: $f(f^{-1}(x)) = f\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) = 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) = 1 - 1 + x = x$ ✓

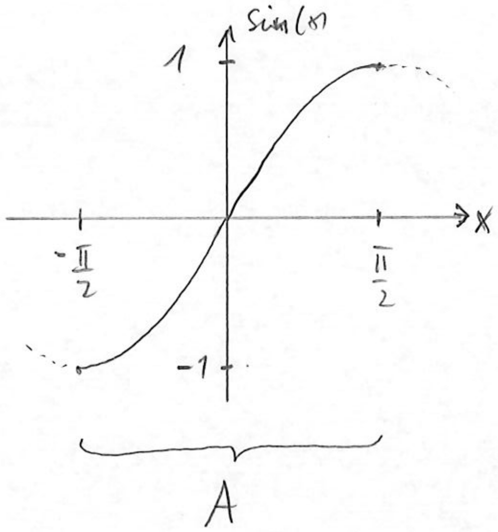
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1+2x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+2x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + x = x$ ✓

Skizze:



2.) $f(x): \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{A} \to \underbrace{[-1, 1]}_{f(A)}$

$$x \mapsto f(x) := \sin(x)$$



[Bem: man muss sin(x) geeignet einschränken, z.B. auf $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

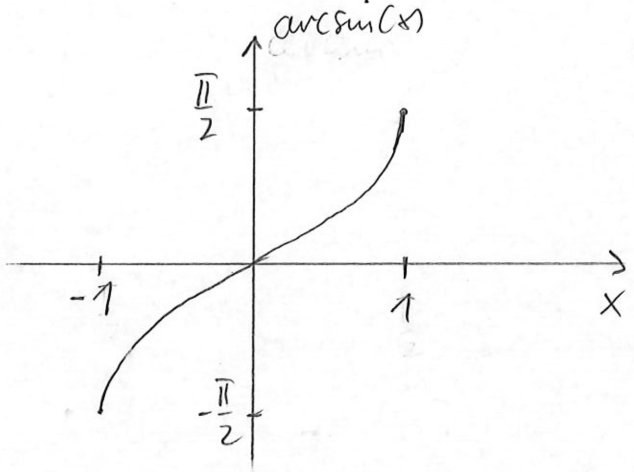
sonst nicht streng monoton $\Rightarrow$ nicht umkehrbar

(z.B. $A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ ginge auch, aber unüblich).]

Def: $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x \mapsto \arcsin(x) := \sin^{-1}(x)$

„Arcus-Sinus“.



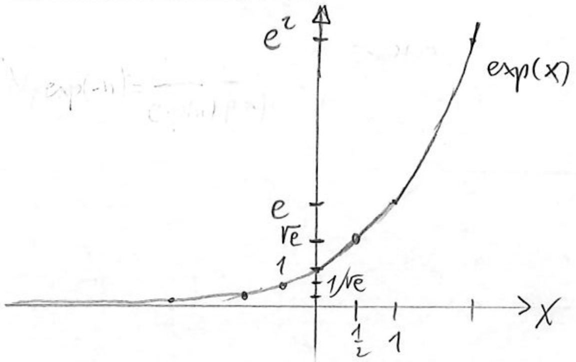
Weitere Beisp.: Ü

Wichtigstes Beisp: Kap. 7

7 Logarithmus und Potenzen

Erinnerung:

x	$\exp(x)$
0	1
1	$e \approx 2{,}71\ldots$
2	e^2
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{e} \approx 1{,}64\ldots$
-1	$1/e$
-2	$1/e^2$
$-1/2$	$1/\sqrt{e}$



$\Rightarrow$ $\exp(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und streng monoton wachsend mit

$f(A) = \exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ Umkehrfkt $\exp^{-1}(x)$ existiert und wird „ln" genannt:

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \underline{\underline{\ln(x) := \exp^{-1}(x)}}$$ „logarithmus naturalis"

oder auch $\ln x$

Folgerungen:

- $\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\exp(\ln(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

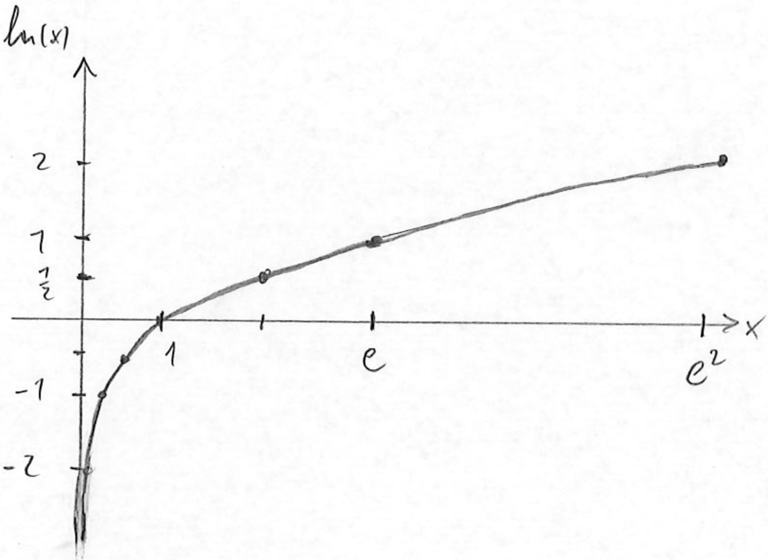
- $\boxed{\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^+$ [„Grundeigenschaft"]

Bew.: $\ln(x \cdot y) = \ln\Big(\overbrace{\exp(\underbrace{\ln x}_{=:a})}^{x} \cdot \overbrace{\exp(\underbrace{\ln y}_{=:b})}^{y}\Big) \quad \Big|\ \exp(a)\cdot\exp(b) = \exp(a+b)$

$$= \ln\big(\exp(\ln x + \ln y)\big) = \ln x + \ln y$$

- Graph:

x	$\ln(x)$
1	0
e	1
e^2	2
$\sqrt{e}$	$1/2$
$1/e$	-1
$1/e^2$	-2
$1/\sqrt{e}$	$-1/2$



Nochmals: $\ln(1) = 0$; $\ln(x)$ für $x \leq 0$ existiert <u>nicht</u>.