5.2 Reihen

Addiert man die Glieder einer Folge, erhält man eine Reihe:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

(nur beginnt man jetzt meist mit 0 statt 1).

Dabei kann man die s_n selber auch wieder als eine Folge betrachten: sog. „Partialsummenfolge".

Folgerung: $s_{n+1} := \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{s_n} + a_{n+1}$

$\Leftrightarrow$ $s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$ (rekursive Definition)

Beisp:

1.) $a_k := r^k a_0 \Leftrightarrow a_{k+1} := r a_k$ (Erinnerung: $x^0 := 1$, $x^1 := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \quad s_n = a_0 (1 + r + r^2 + \ldots + r^n) = a_0 \sum_{k=0}^{n} r^k$$

$\Leftrightarrow$ „geom. Reihe" aus Kap. 2.2 $\Rightarrow$

$$s_n = a_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{falls } r \neq 1$$

$$s_n = a_0 (n+1) \quad \text{falls } r = 1$$

2.) $a_0 := 0$, $a_k := \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{s_n}_{n \geq 1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(sog. harmonische Reihe)

$a_0 = 0$ weggelassen!

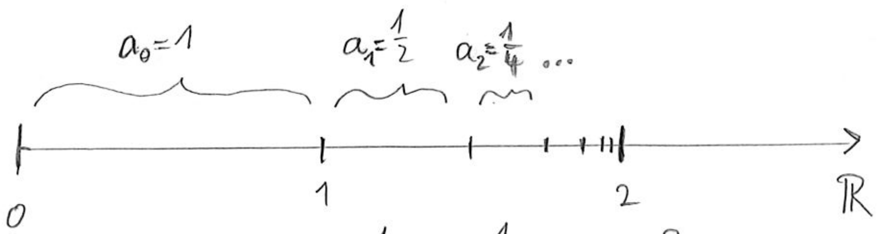
Wenn die Partialsummenfolge konvergiert [„zum Stehen kommt"],

!

dann bezeichnet das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ den Grenzwert der Reihe [„unendliche Summe"], andernfalls ist das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht definiert [„macht keinen Sinn"].

Beisp. 1.) : $a_k := r^k a_0 \Leftrightarrow a_{k+1} = r\, a_k$

a) Anschaulich für $r = \frac{1}{2}$, $a_0 = 1$:



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

Obwohl immer mehr Summanden, kommt Summe „zum stehen"!

b) $|r| < 1$, $a_0 = 1$:

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r}{1-r} \cdot \underbrace{r^n}_{\to 0} \longrightarrow \frac{1}{1-r} \quad \text{für } n \to \infty$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{für } |r| < 1}}$$

c) $|r| \geq 1$: selbst!

Beisp. 2.) : $a_0 := 0,\ a_k := \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \qquad (n \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \geq s_2 + \frac{1}{2} = 2$$

$$s_8 = s_4 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \geq 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

usw.

$\Rightarrow$ harmonische Reihe divergiert!

<u>Frage</u>: Welche Bedingungen an a_k reichen aus, um Konvergenz von s_n zu garantieren?

(Sog. „<u>Konvergenzkriterien</u>").

<u>Bem</u>:

- $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ reicht offenbar <u>nicht</u> aus, siehe Beisp. 2).
- Bedingungen sollen <u>hinreichend</u> sein, <u>nicht</u> unbedingt notwendig!

<u>Beh:</u> Falls $r := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ kleiner als 1, dann

konvergiert die Reihe (sog. „<u>Quotientenkriterium</u>")

<u>Strenger Bew.:</u> Analysis Vorl.

(ebenso: weitere Konvergenzkriterien).

<u>„Nicht-strenge" Begründung</u> : [„für Physiker"]

Für grosse k ist $|a_{k+1}| = r\,|a_k|$ in sehr guter Approx,

d.h. selbe Situation wie für geom. Reihe $\Rightarrow$ konvergent

falls $r = |r| < 1$.

5.3 Potenzreihen

Potenzreihen sind Funktionen der speziellen Form

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Bem:

- Die $c_k \in \mathbb{R}$ sind „fest", x ist „variabel" ($\hat{=}$ „unendliches Polynom")
- Für jeden „gegebene" x ist also $f(x)$ „ganz normale Reihe"

  mit $a_k := c_k x^k$,
- Nur für solche x definiert, für die Reihe konvergent.

- Hinreichende Bedingung:

$$r := \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{} < 1 \qquad (\text{Quotientenkrit.})$$

$$\left|\frac{c_{k+1}\,x^{k+1}}{c_k\,x^k}\right| = \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\cdot x\right| = \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|\cdot|x|$$

$$\Longleftrightarrow \qquad |x| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| \qquad (\text{Quotientenkrit.})$$

5.4 Die Exponentialfunktion

<u>Def.:</u> $\underline{\underline{n! := 1\cdot 2 \cdots n}}$ für $n \in \mathbb{N}$ („n Fakultät")

$\underline{\underline{0! := 1}}$

Beisp.: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$,

$5! = 120$, ..., $10! = 3'628'800$, ...

wächst extrem schnell!

Betrachte Potenzreihe mit $c_k := \frac{1}{k!}$

$\Rightarrow \quad \frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \infty$

$\Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Def:

$$\boxed{\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

Exponentialfkt.

- Wichtigste Fkt. in Physik und Mathematik!
- Konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Nochmals: $0! := 1$, $x^0 := 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(0) = \frac{1}{1} + \frac{0^1}{1} + \frac{0^2}{2!} + \dots = 1$

$$\exp(0) = 1$$

- $\exp(1) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}}_{2,5} + \frac{1}{6}}_{=2,\overline{6}} + \frac{1}{24}}_{2,708\overline{3}} + \frac{1}{120}}_{2,71\overline{6}} + \frac{1}{720}}_{2,7180\overline{5}} + \dots$

[genau das macht auch der Taschenrechner!]

$$e := \exp(1) = 2,7182818\dots$$ Eulersche Zahl

- Man kann beweisen: $e \notin \mathbb{Q}$ (siehe K. Hefft, Kap. 3.5).

$\Rightarrow$ Wenn man nur den Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ benutzen würde, dann würde $\exp(x)$ (sowie viele andere Reihen) für viele x nicht mehr existieren! (Da $\exp(x) \notin \mathbb{Q}$.)

Dies ist ein Hauptgrund, nicht $\mathbb{Q}$ sonder $\mathbb{R}$ zu verwenden!

~

Grundlegende Eigenschaft

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)} \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Bew: Entweder direkt: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$: nicht ganz einfach, hier weggelassen. Oder „indirekt": viel einfacher, wird später nachgeholt.

27.10.23

Folgerungen:

- $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\exp(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}}$$

$$\underline{\underline{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}}$$

- $\underset{\uparrow \in \mathbb{N}}{\exp(n)} = \exp(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ Stück}}) = \underbrace{\exp(1)}_{=e} \cdot \underbrace{\exp(1)}_{=e} \cdots \exp(1)$ ...

$$\underline{\underline{\exp(n) = e^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}}} \Rightarrow \underline{\underline{\exp(-n)}} = \frac{1}{e^n} = \underline{\underline{e^{-n}}}$$