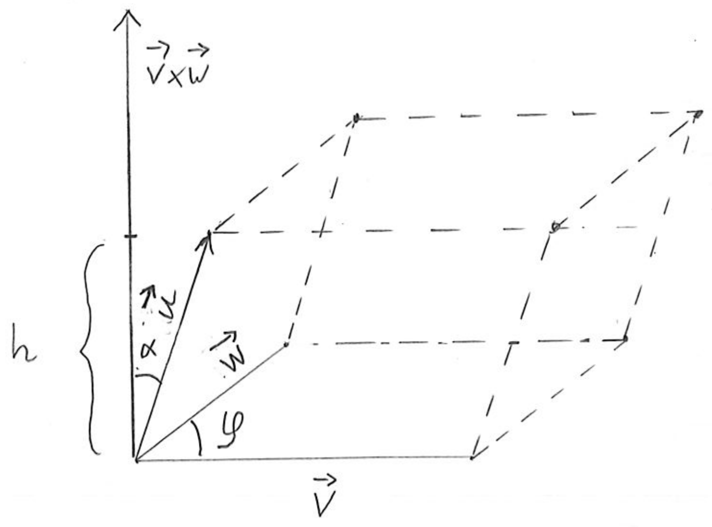
4.) $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0} \underset{\substack{\uparrow \\ 3.)}}{\iff} \vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear (d.h. $\vec{v} = c \cdot \vec{w}$)

oder $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{w} = \vec{0}$

5.)



$\varphi = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$

$\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})$

$h = |\vec{u}| \cos(\alpha)$

$$\underbrace{|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}_{\text{„Spatprodukt"}} = |\vec{u}|\ |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \cos(\alpha) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Höhe}}}{h} \cdot \underbrace{|\vec{v} \times \vec{w}|}_{\text{Grundfläche}} =$$

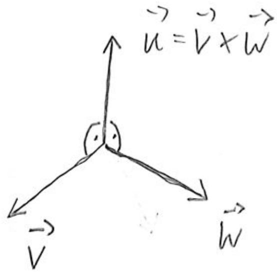
= Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Spats bzw. Parallelepipeds

6.) Sei $\vec{u} := \vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$. Wir wissen:

- $\vec{u}$ ist senkrecht zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$.
- Länge $|\vec{u}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \sin(\measuredangle(\vec{v}, \vec{w}))$.

$\Rightarrow$ es bleiben nur noch 2 Möglichkeiten („Orientierungen") für $\vec{u}$:

a)

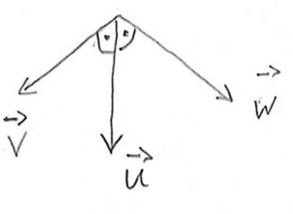


„Rechte-Hand-Regel"

d.h. die 3 Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} := \vec{v} \times \vec{w}$

bilden ein sog. „<u>Rechtssystem</u>"

b)



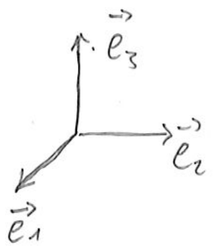
„Linkssystem".

Beh: a) trifft zu

Bew:

Wähle zunächst $\vec{v} = \vec{e}_1$, $\vec{w} = \vec{e}_2$ $\Rightarrow$

$$\vec{u} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$



Rechtssystem

[nur sagen]

Verändere jetzt Länge und Richtung von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kontinuierlich, bis gewünschte Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ erreicht sind, und gleichzeitig so, dass $|\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\sin(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))$ niemals 0 wird (das geht!).

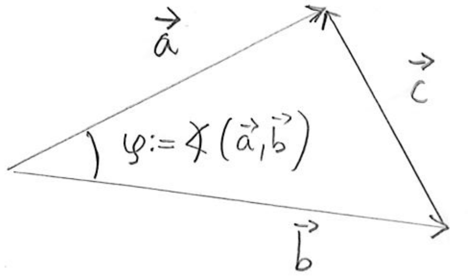
Damit ändert sich auch $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ kontinuierlich, kann also niemals plötzlich „umklappen" oder $\vec{0}$ werden $\Rightarrow$

Rechtssystem bleibt erhalten.

q.e.d.

Ausklang:

a)



$$\vec b + \vec c = \vec a \iff \vec c = \vec a - \vec b$$

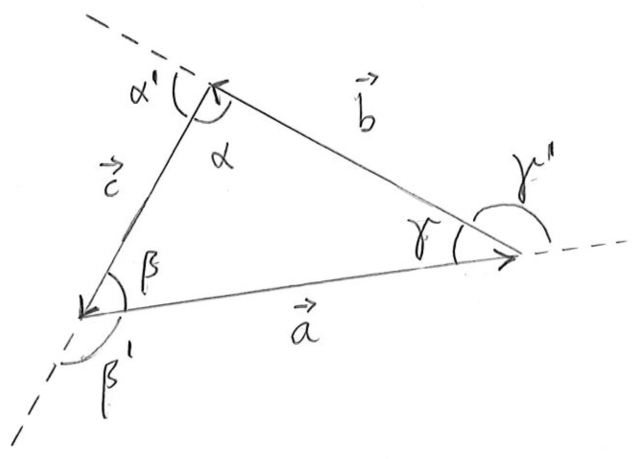
$$\Rightarrow \quad \vec c \cdot \vec c = (\vec a - \vec b)(\vec a - \vec b) = \vec a \cdot \vec a \underbrace{- \vec a \cdot \vec b - \vec b \cdot \vec a}_{-2\,\vec a \cdot \vec b \,=\, -2\,|\vec a|\,|\vec b|\cos(\varphi)} + \vec b \cdot \vec b$$

$$\Rightarrow \quad |\vec c|^2 = |\vec a|^2 + |\vec b| - 2\,|\vec a|\,|\vec b| \cos(\varphi) \qquad (\text{„Cosinussatz"})$$

Spezialfall: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(\hat{=}\, 90^\circ)$ $\Rightarrow \cos(\varphi) = 0$

$\Rightarrow$ Pythagoras.

b.)



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\underbrace{(-\vec{a}-\vec{c})}_{\vec{b}} = -\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=\vec{0}} - \vec{a}\times\vec{c} = -\vec{a}\times\vec{c}$$

$$= \underbrace{(-\vec{b}-\vec{c})}_{\vec{a}}\times\vec{b} = -\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=\vec{0}} - \vec{c}\times\vec{b} = -\vec{c}\times\vec{b}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\gamma') = |\vec{a}\times\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\sin(\beta')$$

$$= |\vec{c}\times\vec{b}| = |\vec{c}|\cdot|\vec{b}|\sin(\alpha')$$

$\sin(\alpha') = \sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$, ebenso β, γ

Division durch $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|$ $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\frac{\sin(\alpha)}{|\vec{a}|} = \frac{\sin(\beta)}{|\vec{b}|} = \frac{\sin(\gamma)}{|\vec{c}|}}}$$

(<u>Sinussatz</u>)

5. Folgen und Reihen

5.1 Folgen

Eine <u>Folge</u> ist eine unendl. lange Auflistung von

Folgegliedern $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>Beisp:</u>

1.) $a_1 := \frac{1}{2}, \quad a_2 := \frac{2}{3}, \quad a_3 := \frac{3}{4}, \quad \dots$

hoffentlich klar!

$\Longleftrightarrow \quad a_n := \frac{n}{n+1}$

2.) $b_1 := -1, \quad b_2 := 1, \quad b_3 := -1, \quad \dots$

$\Longleftrightarrow \quad b_n = ? \quad$ [PÜ] $\quad = (-1)^n$

3.) $q_1 := 1, \quad q_2 := 2, \quad q_3 := 3, \quad \ldots$

$$\Leftrightarrow \quad q_n = ? \quad [\text{PÜ}] \quad = n$$

4.) $a_{n+1} := r\, a_n$ (rekursive Def.) $\Leftrightarrow$ $a_n = r\, a_{n-1} = r \cdot r\, a_{n-2} = \ldots = r^n a_0$

„gegeben".

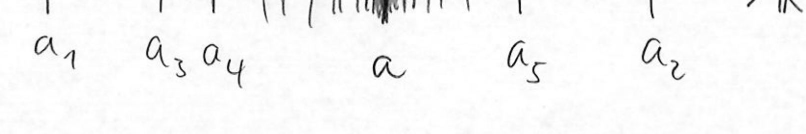
Eine Folge heisst konvergent, wenn alle hinreichend „späten" Folgeglieder a_n beliebig nahe bei einem sog. Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ verbleiben.

- Sprechweise: a_n konvergiert gegen a.
- Schreibweisen: $a_n \to a$ für $n \to \infty$,

$$a_n \xrightarrow{n \to \infty} a,$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

- Veranschaulichung:



- Mathem. präzise: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$. (Für uns hier „zu kompliziert".)

Beisp. von vorhin:

1.) $a_n := \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Anschaulich klar: $\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 1 \quad (= a)$$

2.) $b_n := (-1)^n$: es gibt keinen Grenzwert, d.h.

die Folge ist <u>divergent</u>.

3.) $q_n := n$: wieder divergent, aber hier ist ∞ eine

Art „Ersatzgrenzwert" oder „<u>uneigentlicher Grenzwert</u>":

$q_n \to \infty$ für $n \to \infty$

4.) Falls $|r| < 1$ anschaulich klar:

$r^n = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{n \text{ Stück}}$ wird mit zunehmendem n immer

kleiner, d.h. $r^n \to 0$ für $n \to \infty$.

$\Rightarrow \quad a_n = r^n a_0 \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

Falls $|r| \geq 1$: selbst!