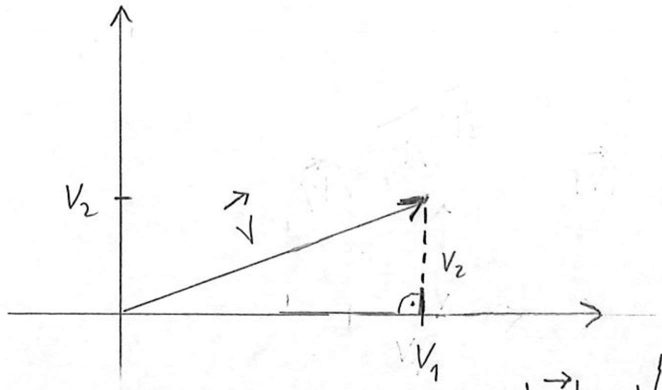
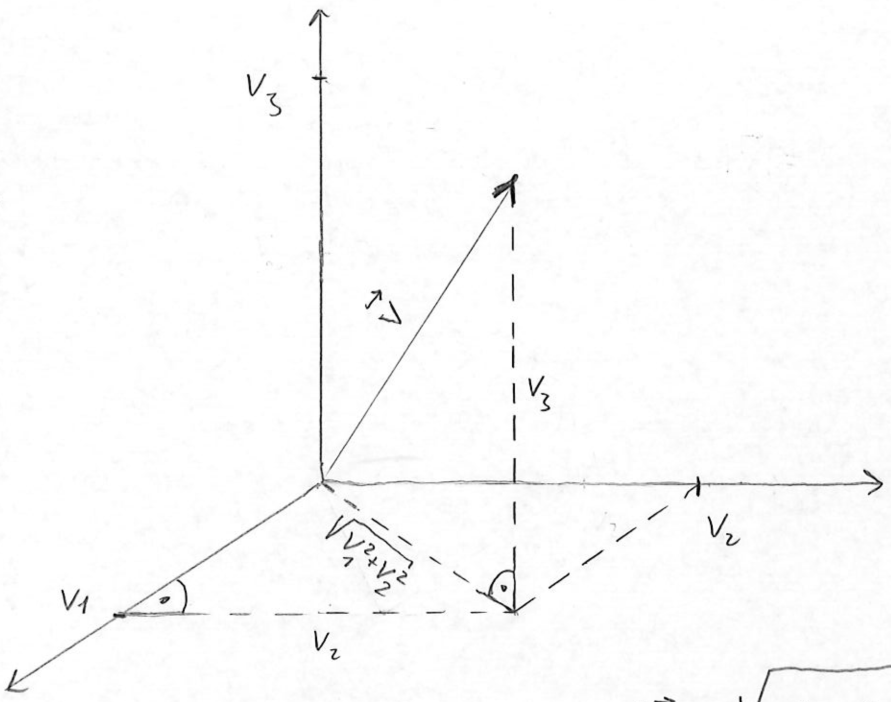
Veranschaulichung:

n = 2:



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$ ✓

n = 3:



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$ ✓

Betrachte $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$.

$\Rightarrow \quad |\vec{v}| ; |\vec{w}| \neq 0$

Def: $\quad \lambda := \frac{1}{|\vec{v}|^2} (\vec{v} \cdot \vec{w})$

$\vec{w}_{\parallel} := \lambda \vec{v}$

$\vec{w}_{\perp} := \vec{w} - \vec{w}_{\parallel} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{w} = \vec{w}_{\perp} + \vec{w}_{\parallel} = \vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w}_{\parallel} = \lambda \; \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{|\vec{v}|^2} (\vec{v} \cdot \vec{w}) \underbrace{\vec{v}^{\,2}}_{|\vec{v}|^2} = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w}_{\perp} = \vec{v} (\vec{w} - \vec{w}_{\parallel}) = \vec{v} \cdot \vec{w} - \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{w}_{\parallel}}_{\vec{v} \cdot \vec{w}} = 0$$

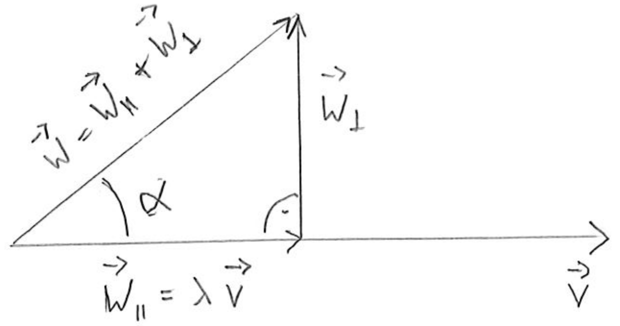
$$\vec{w}_{\parallel} \cdot \vec{w}_{\perp} = \lambda \; \vec{v} \cdot \vec{w}_{\perp} = 0$$

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp}|^2 = (\vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp}) \cdot (\vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp}) = \vec{w}_{\parallel}^{\,2} + \underbrace{\vec{w}_{\parallel} \cdot \vec{w}_{\perp}}_{=0} + \underbrace{\vec{w}_{\perp} \cdot \vec{w}_{\parallel}}_{=0} + \vec{w}_{\perp}^{\,2}$$

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{w}_{\parallel}|^2 + |\vec{w}_{\perp}|^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$

[3 Seiten legen Dreieck fest!]

$\Rightarrow$ $\vec{w}_{\parallel}$ und $\vec{w}_{\perp}$ senkrecht/rechtwinklig zueinander



(für $n \geq 3$ ist dies die durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannte Ebene)

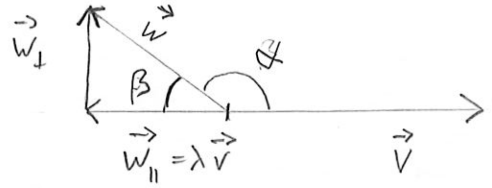
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{|\vec{w}_{\parallel}|}{|\vec{w}|} = \frac{|\vec{v}|\,|\vec{w}_{\parallel}|}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}$$

$$\underbrace{|\vec{v}|\,|\vec{w}_{\parallel}|}_{|\lambda\vec{v}| = |\lambda|\,|\vec{v}|} = |\lambda|\,|\vec{v}|^2 = \frac{1}{|\vec{v}|^2}\,|\vec{v}\cdot\vec{w}|\,|\vec{v}|^2 = |\vec{v}\cdot\vec{w}|$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{v}\cdot\vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos(\alpha)$$

In obiger Skizze: $\lambda \geq 0 \overset{\text{Def. von } \lambda}{\Rightarrow} \vec{v}\cdot\vec{w} \geq 0 \Rightarrow |\vec{v}\cdot\vec{w}| = \vec{v}\cdot\vec{w}$

Falls $\lambda < 0$:



$\Rightarrow |\vec{v}\cdot\vec{w}| = -\vec{v}\cdot\vec{w}$

$$\cos(\beta) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) := \text{Zwischenwinkel von } \vec{v} \text{ und } \vec{w} = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \lambda \geq 0 \\ \beta & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\left(\measuredangle(\vec{v},\vec{w})\right)$$

Folgerungen:

1.) $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \iff \vec{v}\perp\vec{w}$ („senkrecht" oder „orthogonal").

2.) Mit $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k=\delta_{ik}$ folgt: alle $\vec{e}_k$ sind normiert und paarweise orthogonal $\Rightarrow$ $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ heisst eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

3.) Oben:

$$\lambda := \frac{1}{|\vec{v}|^2}(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

$\vec{w}_\parallel := \lambda\vec{v} = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|^2}\cdot\vec{v}$ d.h. $\vec{w}_\parallel$ ist parallel zu $\vec{v}$

$\vec{w}_\perp := \vec{w}-\vec{w}_\parallel$ und $\vec{w}_\perp\cdot\vec{v}=0$ d.h. $\vec{w}_\perp$ ist senkrecht zu $\vec{v}$

$\Rightarrow$ $w=\vec{w}_\perp+\vec{w}_\parallel$ d.h. ein bel. Vektor $\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ kann so „zerlegt" werden in einen Beitrag senkrecht zu $\vec{v}$ und einen parallel zu $\vec{v}$!

4.) $|\vec{v}\cdot\vec{w}| = \big|\,|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{v},\vec{w}))\big| = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\overbrace{|\cos(\sphericalangle(\vec{v},\vec{w}))|}^{\leq 1} \leq |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|$

(Cauchy-Schwarz Ungl.)

5.) $|\vec{v}+\vec{w}|^2 = (\vec{v}+\vec{w})^2 = (\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w}) =$

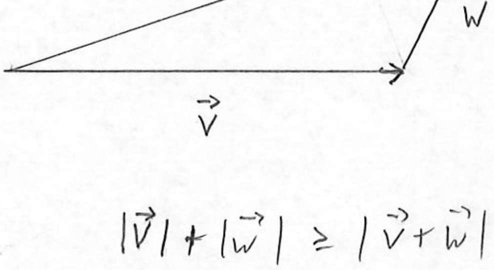
$$= \vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|^2 + \underbrace{2\,\vec{v}\cdot\vec{w}}_{\leq 2|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq 2|\vec{v}||\vec{w}|} + |\vec{w}|^2 =$$

4.)

$$\leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| + |\vec{w}|^2 = (|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|\vec{v}+\vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|}} \qquad \text{(\underline{Dreiecksungl.})}$$

Veranschaulichung:



$|\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{v}+\vec{w}|$ ✓

(III) Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt)

Ist Besonderheit des $\mathbb{R}^3$. Symbol „$\times$".

Def: $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Alternative Schreibweise: $\vec{u} \wedge \vec{v}$

PÜ: berechne $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ? \qquad = \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-3 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

(a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

(b) $(\lambda \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

(d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

Merkhilfe: „bac − cab"

(e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

(sog. Spatprodukt)

Bew: Übungen

Weitere Folgerungen:

1.) $\vec{v} \times \vec{v} \underset{(a)}{=} -\vec{v} \times \vec{v} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}}}$

2.) $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \underset{(e)}{=} \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) \underset{1.)}{=} \vec{w} \cdot \vec{0} = 0$

genauso: $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\vec{v} \times \vec{w} \text{ ist orthogonal zu } \vec{v} \text{ und zu } \vec{w}}}$

3.) $(\vec{v}\times\vec{w})^2 = \underbrace{(\vec{v}\times\vec{w})}_{=:\vec{u}}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) \underset{(e)}{=} \vec{w}\cdot\underbrace{(\vec{u}\times\vec{v})}_{*} =$

([Nebenrechnung]

$* \underset{(a)}{=} -\vec{v}\times\vec{u} = -\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{w}) \underset{(d)}{=} -\left(\vec{v}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) - \vec{w}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})\right)$)

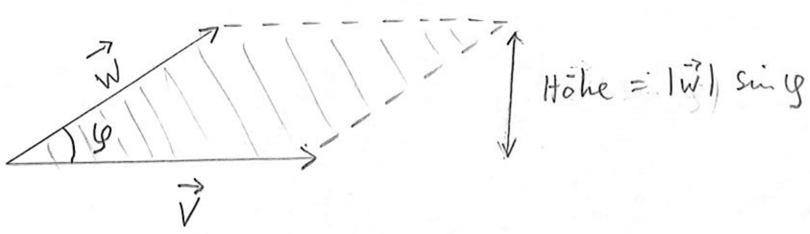
$$= -\underbrace{(\vec{w}\cdot\vec{v})(\vec{v}\cdot\vec{w})} + |\vec{w}|^2|\vec{v}|^2$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{w})^2 = \left(|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\varphi)\right)^2 \qquad \varphi := \measuredangle(\vec{v},\vec{w})$$

$$\Rightarrow |\vec{v}\times\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2\underbrace{(1-\cos^2(\varphi))}_{\sin^2(\varphi)}$$

Da $\varphi\in[0,\pi]$ folgt $\sin\varphi \geq 0 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sin(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))}}$$



$\Rightarrow$ $|\vec{v}\times\vec{w}| \triangleq$ Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms