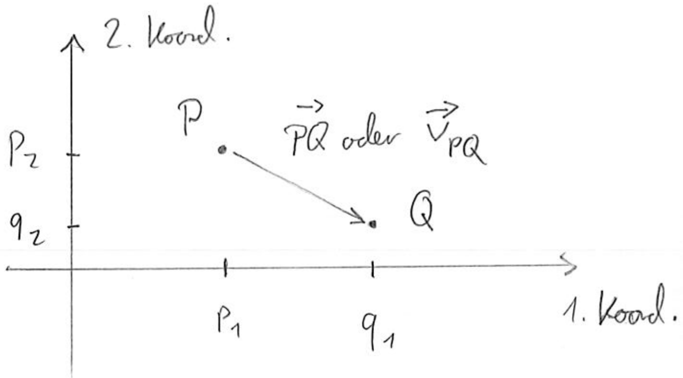
Betrachte 2 „Raumpunkte" $P = \underbrace{(p_1 | p_2 | \ldots | p_n)}_{\text{„Kartesische Koordinaten"}}$ und

$Q(q_1 | q_2 | \ldots | q_n)$

Veranschaulichung für $n=2$:



$\Rightarrow$ „Verbindungsvektor"

$$\underline{\underline{\vec{PQ} = \vec{v}_{PQ} := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}}}$$ („Endpkt. minus Anfangspkt.")

[beschreibt „Verschiebung"]

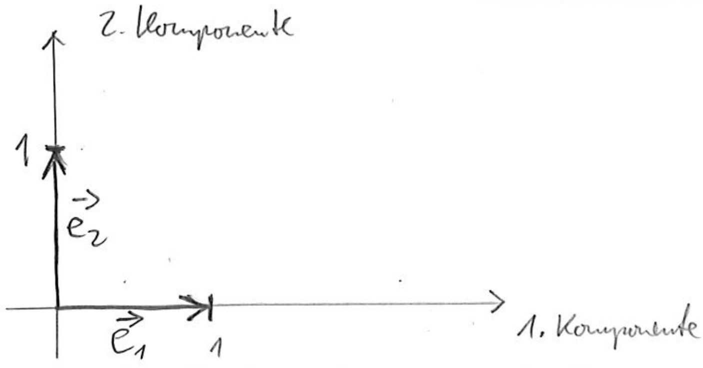
Insbes. ist $\vec{OP} = \vec{v}_{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ („<u>Ortsvektor</u>") [beschreibt „Ort"]

mit $O := (0 | 0 | \ldots | 0)$ („Aufpkt." oder „Koordinatenursprung")

$\sim$

<u>Def.:</u> $\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k, \quad \dots, \quad \vec{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Veranschaulichung für $n=2$:

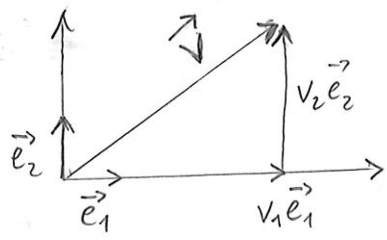


$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_n \end{pmatrix}.$$

$$= v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_1 \vec{e}_1}} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$



d.h. jedes $\vec{v}$ mittels $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ „darstellbar" / „zerlegbar"

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \text{ heisst eine Basis von } \mathbb{R}^n}}$

~

Alternative Schreibweise z.B. für $n=3$: (vgl. EP I):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ldots$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ statt $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z,$$

analog für $n=2$.

Bem.: Vektoren in der Physik: z.B. Ort, aber auch Geschw., Kraft, ...

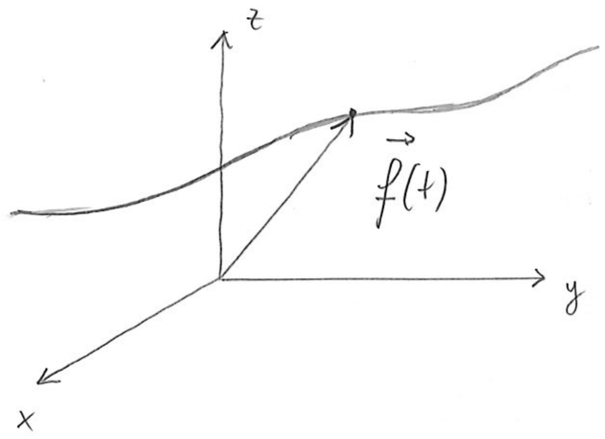
Vektorwertige Fkt'en:

$\vec{f} : A \to \mathbb{R}^n$, A: ganz $\mathbb{R}$ oder ein Teil davon.

$$t \mapsto \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\, \vec{e}_k$$

d.h. je eine „ganz normale Fkt." für jede Komponente!

Veranschaulichung im $\mathbb{R}^3$:



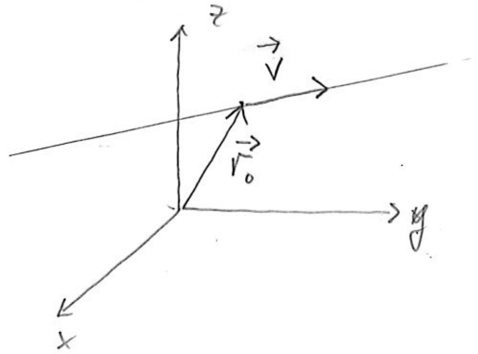
z.B. Ortsvektor eines Massepunktes als Fkt. der Zeit

$\hat{=}$ „Weg / Kurve / Bahn / Pfad ..."

Beisp:

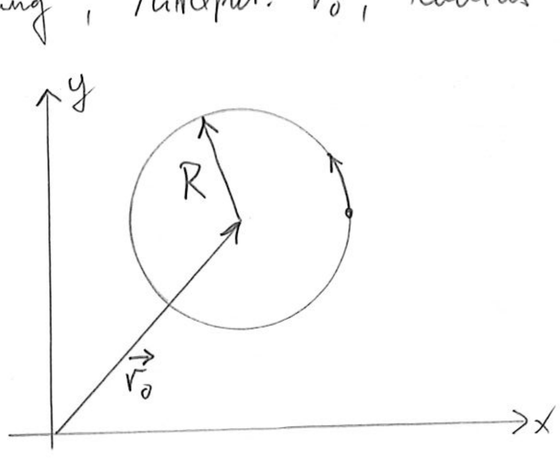
1.) $\vec{f}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}$

$\hat{=}$ Bewegung mit konst. Geschw. $\vec{v}$ und „Anfangsbed." $\vec{f}(0) = \vec{r}_0$



2.) Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{f}(t) = \vec{r}_0 + R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

$\hat{=}$ Kreisbewegung, Mittelpkt. $\vec{r}_0$, Radius R, Winkelgeschw. ω



„einmal rum" wenn $\omega t = 2\pi \iff t = 2\pi/\omega$

(II) Man kann Vektoren miteinander multiplizieren nach folgender Regel:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

sog. Skalarprodukt oder inneres Produkt.

PÜ: $n = 4$, berechne $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$ $= 0 + 3 - 1 + 0 = 2$

Es folgt:

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

(2) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(3) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

(4) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

Bew: Übungen

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dieser „Zusatzausstattung" heisst

ein <u>Hilbertraum</u>.

$$\vec{e}_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

Betrachte wieder $\vec{e}_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k \quad , k \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_k \cdot \vec{e}_k = 0^2 + \dots + 0^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1^2} + 0^2 + \dots + 0^2 = 1$$

Falls $i \neq k$ dann $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 + \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1 \cdot 0} + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 + \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{0 \cdot 1} + \dots + 0 \cdot 0 = 0$

<u>Def</u>: $\delta_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ („<u>Kronecker-Symbol</u>")

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} \quad \forall\, i,k \in \{1, \dots, n\}}$$

<u>Def:</u> $$|\vec{v}| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$$

sog. „<u>Betrag</u>" oder „<u>Länge</u>" oder „<u>Norm</u>" von $\vec{v}$.

Alternative Schreibweise: $\|\vec{v}\|$ oder v.

Ein Vektor $\vec{v}$ heisst <u>normiert</u> oder <u>Einheitsvektor</u> $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{|\vec{v}| = 1}}$

Folgerungen:

a) $$\underline{\underline{|\vec{v}|^2}} = \sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \underline{\underline{\vec{v} \cdot \vec{v} =: \vec{v}^{\,2}}}$$

Beisp: $$\underline{\underline{|\vec{e}_k|}} = \sqrt{\underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k}_{\delta_{kk} = 1}} = \underline{\underline{1}}$$

b) $$|\vec{v}| \overset{(2)}{\geq} 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad |\vec{v}| = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \vec{v} = \vec{0}$$

c) $$\underline{\underline{|\lambda \vec{v}|}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda v_k)^2}_{\lambda^2 v_k^2}} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} v_k^2} = \underbrace{\sqrt{\lambda^2}}_{|\lambda|} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} = \underline{\underline{|\lambda| \cdot |\vec{v}|}}$$