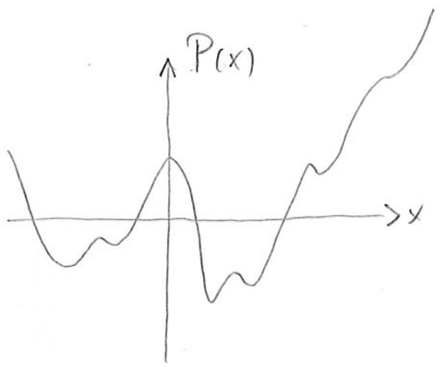
4.) $P(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $\quad (a_k \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0)$

(„Polynom n-ter Ordng")

NS: maximal n, minimal $\begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Keine allg. Formel für $n \geq 5$ [beweisbar!]; numerisch einfach.



(max. n-1 „Richtungswechsel")

Beisp: Übungen.

[Ev. selber einige konkrete Beisp. „ausixen": es gibt viel zu entdecken!]

Ausblick: Man kann fast jede „praktisch relevante" Fkt. $f(x)$ durch Polynome approximieren und für $n \to \infty$ sogar exakt reproduzieren: $\to$ sog. Potenzreihen (später mehr).

3.5 Rationale Funktionen

Sind $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome, dann heisst

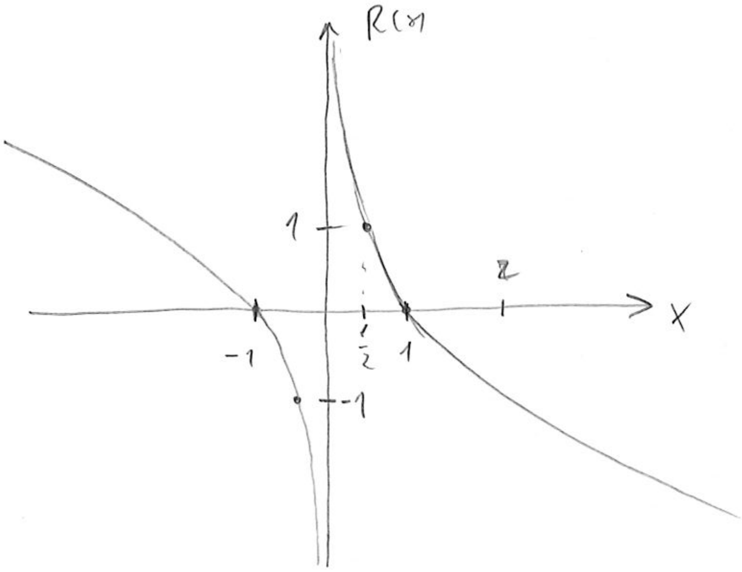
$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$ eine (gebrochen) rationale Fkt.

Beisp: $R(x) := \frac{1-x^2}{2x}$

NS : $x = \pm 1$

„Pol" (NS im Nenner) : $x = 0$, für kleine x: $R(x) \approx \frac{1}{2x}$

Für grosse x : $R(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}x \simeq -\frac{1}{2}x$



Weitere: Übungen.

<u>Im Allg.</u>: Pole bei NS von $Q(x) \Rightarrow$

Noch reichhaltiger/komplizierter als Polynome, aber nicht ganz so wichtig (in der Physik).

4 Vektoren

Hat viele verschiedene Aspekte $\Rightarrow$ in mehrere Kap. aufgeteilt.

Def.: $\mathbb{R}^3 := \{ (v_1, v_2, v_3) \mid v_{1,2,3} \in \mathbb{R} \}$

$\hat{=}$ Menge aller Zahlentripel („Vektoren").

Elemente aus $\mathbb{R}^3$ werden durch „Vektorpfeile" gekennzeichnet, z.B. $\vec{v}, \vec{u}, \vec{x}$ usw. D.h. jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist von der Form $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Alternative Schreibweise:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(sog. Zeilen- bzw. Spaltenvektoren).

Wieder ist $\mathbb{R}^3$ mehr als nur eine Menge, nämlich:

(I) Man kann Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren nach folgenden Regeln:

Betrachte zwei bel. $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Def:</u> $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$ („komponentenweise")

$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$ („skalare/äussere Multipl.")

mit oder ohne Pkt. egal!

$\Rightarrow$ „übliche Rechenregeln", z.B.

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$(x+y)\, \vec{v} = x \vec{v} + y \vec{v} \qquad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}$

usw.

[selber verifizieren!]

Weitere Defs.: $-\vec{v} := (-1)\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$ (inverser Vektor)

$\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Nullvektor)

$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$

Folgerung: $\vec{v} - \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \forall\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Die Menge $\mathbb{R}^3$ mit dieser „Zusatzausstattung" heisst ein Vektorraum.

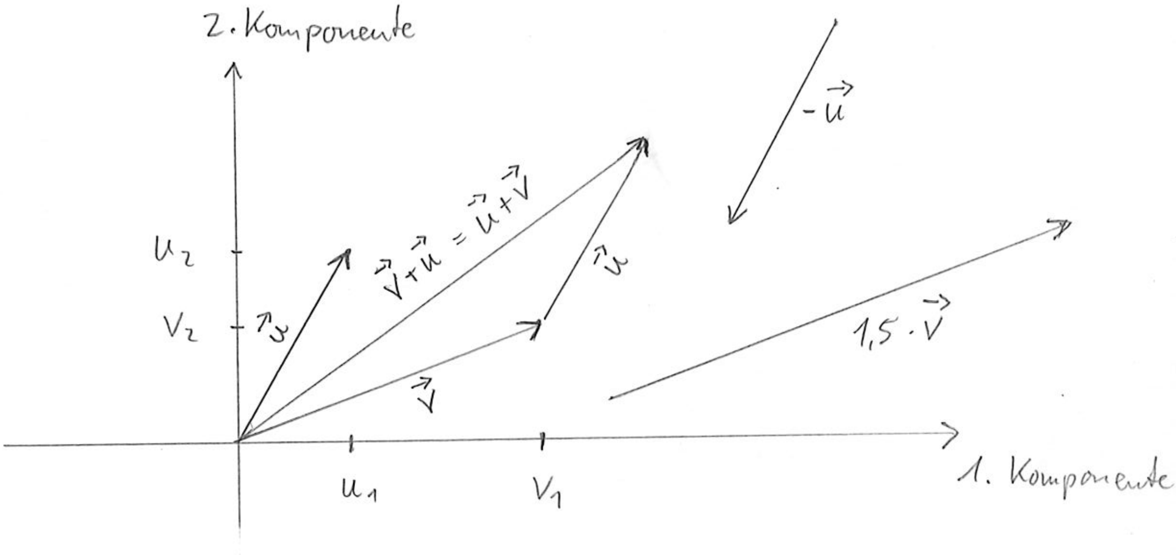
Analog: Vektorraum $\mathbb{R}^2$ (alles mit 2 statt 3 Komponenten).

Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (–"– n –"–).

z. B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

n heisst die Dimension von $\mathbb{R}^n$.

„Veranschaulichung" für $n = 2$: Vektor $\hat{=}$ „Pfeil in der Ebene"



$\Rightarrow$ $\vec{v}$ hat bestimmte „Richtung" und „Länge", ist aber „verschiebbar"!

Für $n = 3$: „Pfeil im Raum"; für $n = 1$: „auf Geraden";

für $n \geq 4$ keine „Veranschaulichung"!

Beisp. für $\mathbb{R}^4$: $v_{1,2,3} \hat{=}$ Ort, $v_4 \hat{=}$ Zeit; für $\mathbb{R}^6$: $v_{4,5,6} \hat{=}$ Geschw. usw
[Relativitätstheorie] [klass. Mechanik]