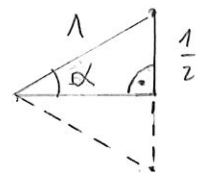
$\alpha = \frac{\pi}{6} \hat{=} 30°$:

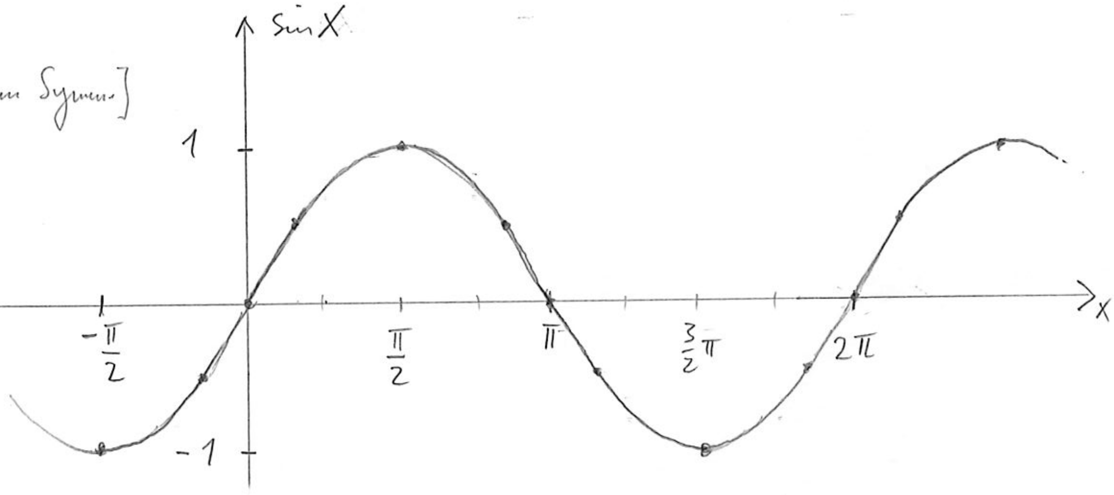


$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

analog: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ Graph:

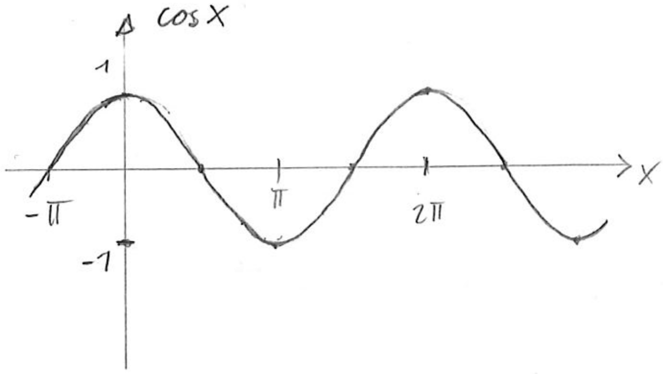
[erst $[0,\pi]$, dann Symm.]

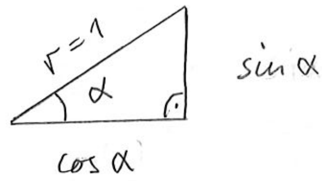


[Vorstellung: kreisender Pkt.]

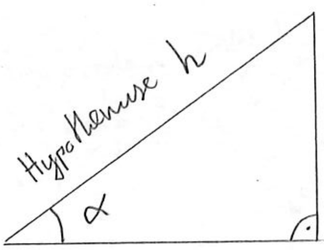
(so kann man sin(x) ohne zu rechnen „schätzen")

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$





multiplizieren alles mit bel. Faktor $h \in \mathbb{R}^+$:



Gegenkathete $g = h \cdot \sin\alpha$

Ankathete $a = h \cdot \cos\alpha$

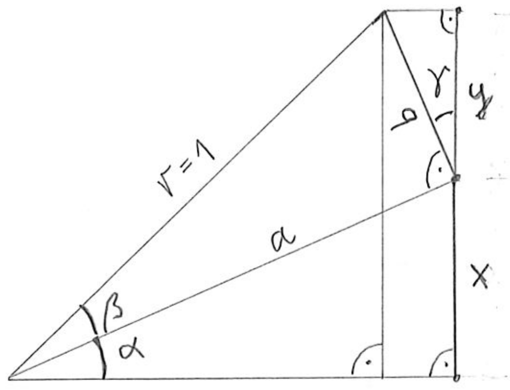
$$\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$ (Tangens)

$$\Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Additionstheoreme



1. $\gamma = \alpha$

2. $b = \sin\beta$, $a = \cos\beta$

3. $\frac{x}{a} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \sin(\alpha)\cdot a \overset{2.}{=} \sin(\alpha)\cos(\beta)$

4. $\frac{y}{b} = \cos\gamma \overset{1.}{=} \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad y = \cos(\alpha)\cdot b \overset{2.}{=} \cos(\alpha)\sin(\beta)$

5. $\sin(\alpha+\beta) = x + y$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin(\alpha)\underbrace{\cos(-\beta)}_{=\cos(\beta)} + \cos(\alpha)\underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin(\beta)}$$

$$\underline{\underline{\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)}}$$

(„sico = cosi")

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sin(\underbrace{(\alpha+\tfrac{\pi}{2})+\beta}_{\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}})}_{\cos(\alpha+\beta)} = \underbrace{\sin(\alpha+\tfrac{\pi}{2})}_{\cos(\alpha)}\cos(\beta) + \underbrace{\cos(\alpha+\tfrac{\pi}{2})}_{-\sin(\alpha)}\sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

analog für $-\beta$ $\Rightarrow$

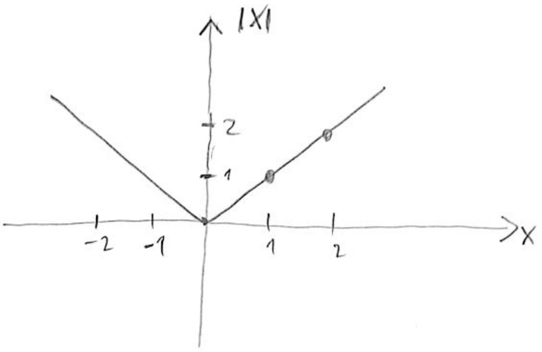
$$\underline{\underline{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)}}$$

(„coco sisi")

3.2 Die Betragsfunktion

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$

$$x \mapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$



Übungen

⟹

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ — " — (Dreiecksungl.)
- $|x-y| \mathrel{\hat{=}}$ Abstand zw. x und y

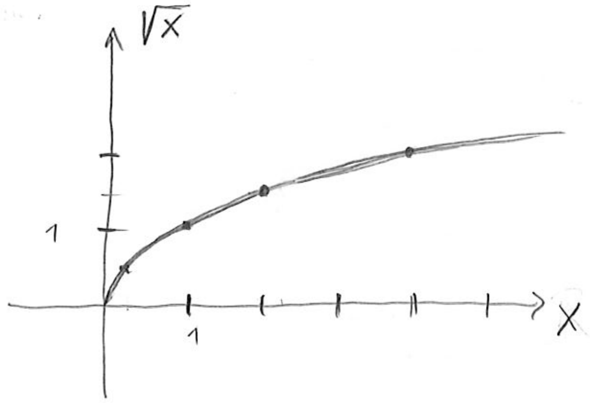
3.3 Die Wurzelfunktion

$$f(x): A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$$

Nur für $x \geq 0$ „wohldefiniert" $\Rightarrow A = \mathbb{R}_0^+$

Beachte $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$ (z.B. $\sqrt{4} = \pm 2$ ist falsch! $f(x)$ muss eindeutig sein!)

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{4}$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
1	1
$2{,}25$	$1{,}5$
4	2



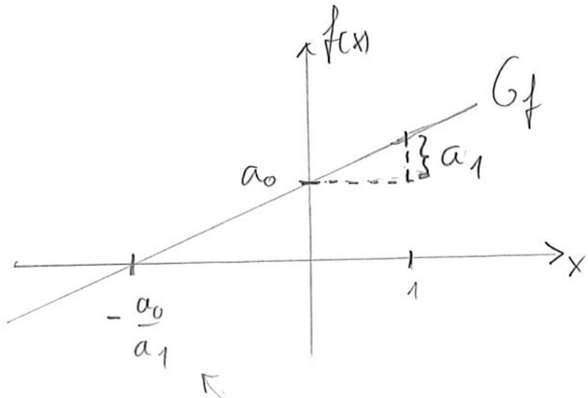
(so lässt sich $\sqrt{x}$ für viele x recht gut „schätzen"!)

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|x| = \sqrt{x^2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3.4 Polynomfunktionen

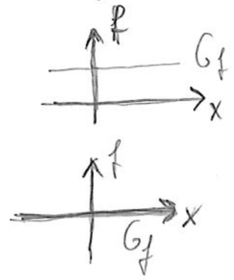
1.) $f(x) := a_0 + a_1 x \qquad (a_{0,1} \in \mathbb{R})$

„Gerade mit Achsabschnitt a_0 und Steigung a_1" (lineare Fkt.)



NS : $f(x) = 0 = a_0 + a_1 x \iff x = -\frac{a_0}{a_1}$ (falls $a_1 \neq 0$);

falls $a_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{keine NS falls } a_0 \neq 0 \\ f(x) = 0 \ \forall x \text{ falls } a_0 = 0 \end{cases}$



Was „passiert" mit G_f, wenn man a_0 oder a_1 ändert?

2.) $f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\quad (a_{0,1,2} \in \mathbb{R},\ a_2 \neq 0)$

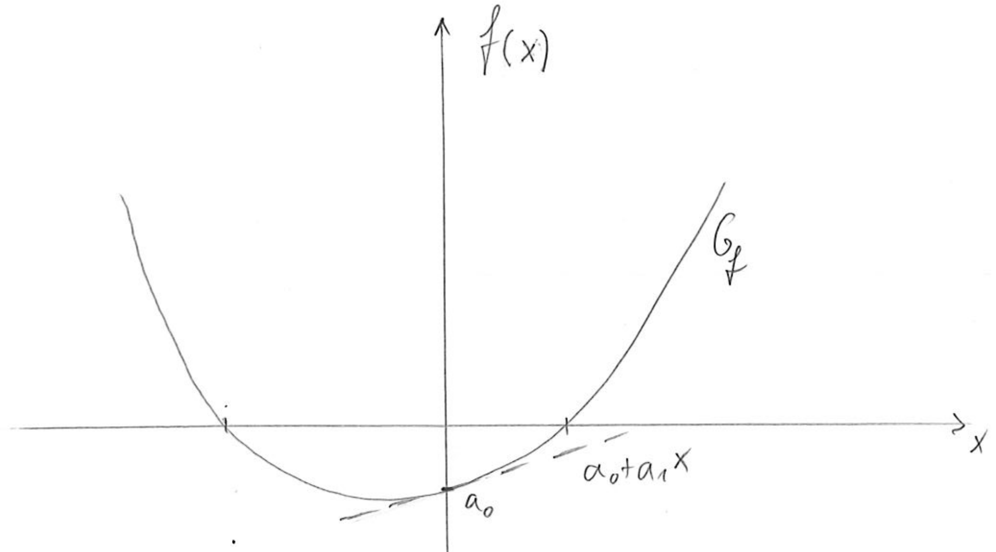
(quadratische Fkt.)

NS $\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ p-q-Formel (→ Übungen).

Verhalten für x nahe 0: $f(x) \overset{\text{„approximativ"}}{\approx} a_0 + a_1 x$ $\quad$ (x^2 viel kleiner als x!)

Verhalten für grosse x (pos. oder neg.): $f(x) \approx a_2 x^2$

($a_0 + a_1 x$ vergleichsweise klein!)



Es kann zwei, eine, oder keine NS geben (je nach $a_{0,1,2}$).

$a_2 > 0$ $\Leftrightarrow$ „nach oben geöffnet".

Variation von $a_{0,1,2}$ $\Leftrightarrow$ „verschieben", „stauchen/strecken", „spiegeln".

3.) $f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{R},\ a_3 \neq 0)$

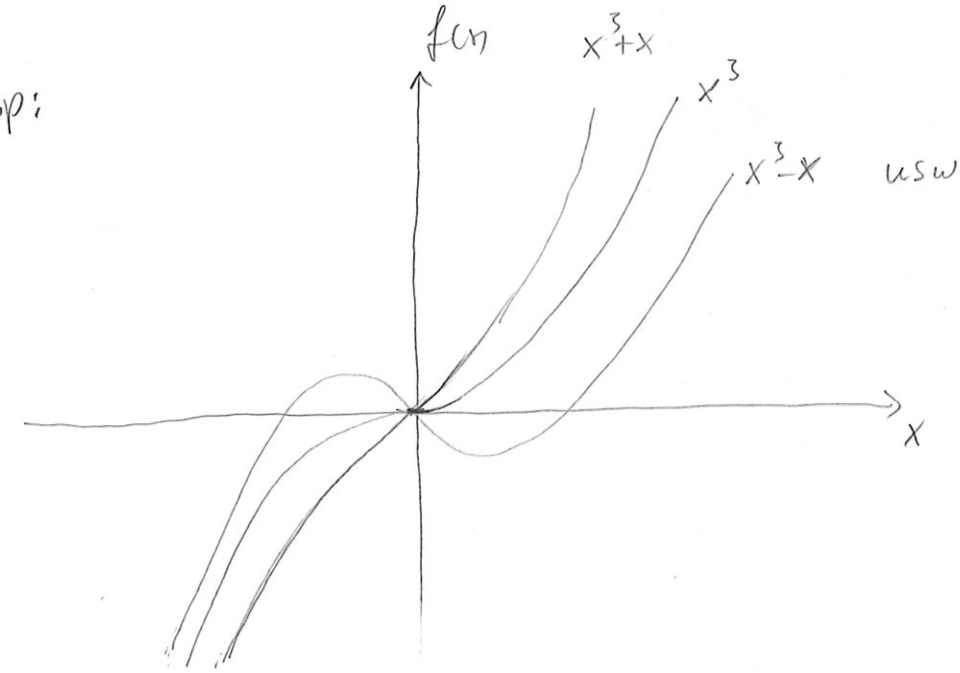
(„<u>kubische Fkt.</u>")

Nahe 0: $f(x) \approx a_1 + a_1 x$

Für grosse x: $f(x) \approx a_3 x^3 \Rightarrow$ es gibt mindestens eine NS.

Eventuell weitere NS je nach a_k (maximal 3). Formel dafür ist sehr kompliziert (unpraktisch). Per Computer einfach mit hoher Genauigkeit berechenbar.

Beisp:



Allg. Fall:

Var. von $a_k \Leftrightarrow$ „verschieben", „stauchen/strecken", „spiegeln", „verkippen"