Einführungsblock (WS 23/24)

P. Reimann

Organisatorisches → www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/VK.html

2. Vorl. (Do. 12.10.) : Vertretung, ab 8^{00}

Gruppeneinteilung: Fr. 13.10.

Kern-Ziel: Sie selber sollen aktiv werden! Nicht nur „konsumieren".

⇒ Vorlesungs-Mitschrift (Papier schlägt Bildschirm),

Präsenz-Übungen: wichtigster Teil der Vorl.!

1. Einleitung

Mathematik ist wichtigstes Handwerkzeug in der Physik: physikalische Gesetze und Vorgänge lassen sich quantitativ nur mit mathematischen Mitteln formulieren, untersuchen und verstehen („Sprache der Physik").

Aber: ganz andere Herangehensweise als in der Mathematik selber (weniger streng, anwendungsorientiert).

Ziele:

- Reaktivierung des Vorwissens.
- Vorbereitung auf Physik- und Mathematikvorlesungen.
- Nochmals: Sie selber sollen aktiv werden.

Probleme:

- Vorkenntnisse sehr verschieden.
- Wenig Zeit.

Inhalt: lassen Sie sich überraschen.

Vieles kommt in anderen Vorlesungen nochmals „gründlicher".

2. Grundlagen

2.1 Mengen und Zahlen

Eine <u>Menge</u> wird definiert entweder durch Aufzählen ihrer <u>Elemente</u> oder durch Angabe der Eigenschaften ihrer Elemente.

<u>Beisp:</u>

„Definition" („Festsetzung", „was bedeutet das (neue) Symbol A?")

- $A := \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ („Ziffern")

Menge A — u.s.w. (hoffentlich klar!)

u.s.w. bis unendlich; hoffentlich klar, obwohl vollst. Aufzählung unmögl.!

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ (natürliche Zahlen)

traditionelles Symbol

- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ (natürl. Zahlen inkl. Null)

- $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ (ganze Zahlen)

äquivalent:

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

↑ Abk. für „1 und/oder −1"

$\mathbb{Z} := \{n \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -n \in \mathbb{N}\}$

↑ „Zusatzbedingungen an n"

$a \in A$ bedeutet: a ist Element der Menge A.

$a \notin A$ –‖– : a ist nicht –‖– .

z.B. $0 \in \mathbb{Z}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ usw.

- $G := \{ n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \text{ gerade} \}$ („gerade Zahlen")

Präsenzübung: erfinde äquivalente Definitionen für G.

Lösung: z. B.

$$G := \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ gerade} \}$$

$$G := \{ n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m,\ m \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ n \in \mathbb{Z} \mid n/2 \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ 2m \mid m \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ 0, \pm 2, \pm 4, \dots \}$$

- $\underline{\underline{\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\}}}$ (rationale Zahlen)

- $\underline{\underline{\mathbb{R} := \{ x \mid x \text{ kann als Dezimalzahl geschrieben werden}^* \}}}$

*mit endl. oder unendl. vielen Nachkommastellen.

(reelle Zahlen $\hat{=}$ Zahlengerade)

$\uparrow$

„entspricht", „äquivalent zu"

z.B. $\underbrace{\frac{5}{7} \in \mathbb{Q},\ \frac{5}{7} \in \mathbb{R}}_{\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}}$, $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$,

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (ohne Bew.), $\underbrace{\underbrace{\sqrt{2} \in \mathbb{R},\ -\sqrt{2} \in \mathbb{R}}_{\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{R}}}_{\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}}$

$\underline{\underline{\mathbb{R} \text{ ist der wichtigste Zahlenbereich für die Physik}}}$

(später noch: komplexe Zahlen $\mathbb{C}$)

- $\emptyset := \{\}$ (leere Menge)

- $L := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$

$\hat{=}$ Lösungsmenge der Gl. $x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ oder $x = -1$

$\uparrow$
Äquivalenz-Zeichen

$\Rightarrow \quad L = \{1, -1\} = \{\pm 1\}$

$\uparrow$
Implikation / Folgerung

Präsenzübung:

Bestimme analog $\mathbb{B} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^5 + 4x = 4x^3 \}$

Lösung: $\Leftrightarrow \quad x^5 + 4x - 4x^3 = 0 = x\big(\underbrace{x^4 - 4x^2 + 4}_{(x^2-2)^2}\big)$ (sollte man wissen!)

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } \underbrace{x^2 - 2 = 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2} \text{ oder } x = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{B} = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{0, \pm\sqrt{2}\}$$

Mehr dazu: Schmidt-Rubart Kap. 1.1

Aber: <u>$\mathbb{R}$ ist mehr als nur eine Menge</u>, nämlich:

1.) Mit den Zahlen aus $\mathbb{R}$ kann man rechnen „wie gewohnt"

(analog für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, aber $\mathbb{R}$ ist eben am wichtigsten!)

Beisp: Präsenzübungen

- $\frac{3}{5} + \frac{2}{6} = ?$ $\qquad = \frac{18}{30} + \frac{10}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

- $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = ?$ $\qquad = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

- $x : \frac{x}{y} = ?$ $\qquad = x \cdot \frac{y}{x} = \frac{xy}{x} = y$

Eventuelle Lücken im „<u>Bruchrechnen</u>" muss man umgehend selbst schliessen!

$\Leftrightarrow$ die 4 Grundrechenarten „funktionieren" nach den gewohnten Regeln: z.B:

$$a + b = b + a \quad \underbrace{\forall\, a, b \in \mathbb{R}}_{\text{„für alle a und b aus } \mathbb{R}\text{"}}$$

$$a(b+c) = ab + ac \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

usw.

$\Leftrightarrow$ die Menge $\mathbb{R}$ ist zusätzlich mit einer sog. <u>algebraischen Struktur</u> „ausgestattet".

2.) Für zwei beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer genau eine ($\hat{=}$ „eine und nur eine") der drei Ordnungsrelationen

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b$$

„kleiner" „gleich" „grösser"

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ ist zusätzlich mit einer Ordnungsstruktur ausgestattet.

Ferner : $a \leq b$ $\hat{=}$ kleiner oder gleich

$a \geq b$ analog

„Rechenregeln" sollten wieder bekannt sein (Lücken selbst schliessen).

z.B. • falls $a<b$ dann $a+c<b+c$ für alle $c\in\mathbb{R}$

kurz: $a<b \Rightarrow a+c<b+c \quad \forall c\in\mathbb{R}$

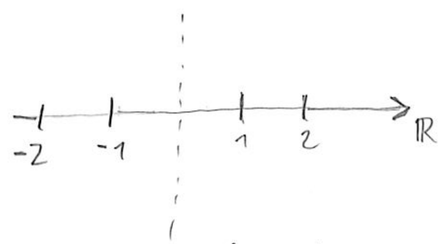
• $a<b \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c \quad \forall\, c>0,$

$\phantom{a<b \Rightarrow{}} a\cdot c>b\cdot c \quad \forall\, c<0.$

Beisp: $1<2$, $c=-1 \Rightarrow$

$1\cdot(-1)=-1>-2=2\cdot(-1)$

Anschaulich:



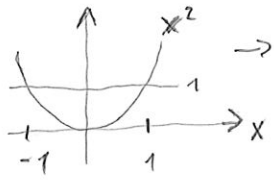
„Spiegelung"

2.11

<u>Präsenzübung / Hausaufgabe</u>

Bestimme $L := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0 \}$.

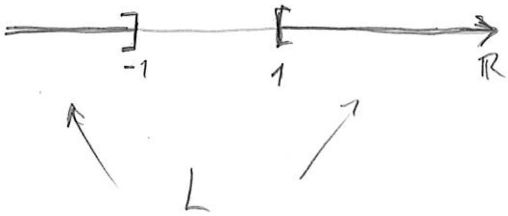
$\hat{=}$ Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 1 \geq 0$



→ Kap. 3!

$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$ oder $x \leq -1$

$\Rightarrow \quad L = \{ x \mid x \geq 1 \text{ oder } x \leq -1 \}$



Siehe auch Schmidt-Riebart Kap. 1.2