Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2024 — Übungsblatt 15

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html

Schriftlich abzugeben sind: 53a und b, 54, 55a, 56a

Aufgabe 53

Wie in Kapitel 17.2 der Vorlesung betrachten wir eine Funktion der Form $f(x) := x^2$ mit $x \in [-\pi, \pi]$.

a) Bestimmen Sie deren Fourierkoeffizienten a_n und b_n.
Hinweis: Man muss zweimal partiell integrieren.

b) Was kann man durch Ableiten der zugehörigen Fourierreihe folgern?

c) Analog: Was folgt durch Integrieren („Aufleiten“)?

Aufgabe 54

Bestimmen Sie für $f(x) := x^2$ die komplexen Fourierkoeffizienten f_n (vgl. Kap. 17.3).

Aufgabe 55

Jetzt betrachten wir die komplexen Fourierkoeffizienten f_n eine beliebige *reellwertigen* Funktion $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mir $f(-\pi) = f(\pi)$. Zeigen Sie:

a) $f_{-n} = f_n^*$ für alle n.

b) Falls $f(-x) = f(x)$ (gerade Funktion) dann gilt ausserdem $f_{-n} = f_n$ für alle n und somit sind alle f_n rein reell.

c) Falls $f(-x) = -f(x)$ (ungerade Funktion) dann gilt ausserdem $f_{-n} = -f_n$ für alle n und somit sind alle f_n rein imaginär.

– bitte wenden –

Aufgabe 56

Bonusaufgabe: zählt nicht bei der Berechnung der minimal erforderlichen Punkte, aber man kann noch Punkte erhalten.

Wir betrachten zwei lineare Abbildungen A und B auf einem n-dimensionalen Hilbertraum V (siehe Kapitel 16.5 der Vorlesung). Zeigen Sie:

a) Mit $C(v) := A(B(v))$ bzw. $Cv := ABv$ ist C ebenfalls eine lineare Abbildung.

b) Wenn A_{jk} die Matrixelemente der zu A gehörigen Matrix $\underline{\underline{A}}$ bezeichnen, und analog für B und C, dann gilt $C_{jk} = \sum_{l=1}^{n} A_{jl} B_{lk}$.

c) Wie sollte man also sinnvollerweise die Multiplikation $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ zweier Matrizen definieren?

d) Wie in Aufgabe 51 seien $U_{jk} := n^{-1/2} e^{2\pi ijk/n}$ die Matrixelemente von $\underline{\underline{U}}$ und $V_{jk} := n^{-1/2} e^{-2\pi ijk/n}$ die von $\underline{\underline{V}}$. Bestimmen Sie Matrix $\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}$ (bzw. deren Matrixelemente).