Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2024 — Übungsblatt 14

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html

Schriftlich abzugeben sind: 49 und 51

Aufgabe 49

Sei $v_1, ..., v_n$ ein Orthonormalsystem eines Hilbertraumes V (d.h. $\langle v_j|v_k\rangle = \delta_{jk}$, aber $v_1, ..., v_n$ muss keine Basis von V sein). Ferner sei $f \in V$ beliebig aber fest und $f_k := \langle v_k|f\rangle$. Beweisen Sie die sog. *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \leq \|f\|^2 \; .$$

Hinweis: Nutzen Sie $0 \leq \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k v_k\|^2$ aus.

Aufgabe 50

V sei die Menge aller $n \times n$-Matrizen A mit Matrixelementen $A_{jk} \in \mathbb{C}$ (wie in der Vorlesung erwähnt, benutzen wir hier die alternative Notation A statt $\underline{\underline{A}}$ für Matrizen). Addition und skalare Multiplikation in V seien "komponentenweise" definiert, d.h. $(A + B)_{jk} := A_{jk} + B_{jk}$ und $(aA)_{jk} := a\, A_{jk}$ für alle $A, B \in V$ und $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) V ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. **Hinweis:** Aufgaben 44 und 45.

b) Mit $\langle A|B\rangle := \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (A_{jk})^* B_{jk}$ wird V zu einem Hilbertraum.
Hinweis: Aufgabe 47b.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis sowie die Dimension von V.

Aufgabe 51

Betrachten Sie die $n\times n$-Matrix $\underline{\underline{U}}$ mit Matrixelementen $U_{jk} := e^{2\pi ijk/n}$ und den Vektor $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{C}^n$ mit Komponenten $x_k := e^{-2\pi ikl/n}$ (dabei ist i die imaginäre Einheit und $l \in \{1, ..., n\}$ beliebig aber fest). Berechnen Sie die Komponenten y_j des Vektors $\underset{\sim}{y} := \underline{\underline{A}}\, \underset{\sim}{x}$.
Hinweis: Seite 16.24 in den Vorlesungsnotizen.

– bitte wenden –

Aufgabe 52

Betrachten Sie den Funktionenraum V aus den Aufgaben 45 und 47 bzw. das Beispiel 2.) aus Kap. 16.1 der Vorlesung. Die Abbildung $D : V \to V,\ f \mapsto D(f)$ sei definiert via $(D(f))(x) := f'(x)$ (Ableitung).

a) Zeigen Sie: D ist ein linearer Operator.

b) Betrachten Sie dasselbe Beispiel wie in Aufgabe 47c und bestimmen Sie die 2×2-Matrix $\underline{\underline{D}}$.